EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

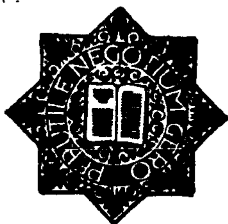
Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

13e JAARGANG 1936/37, Nr. 2.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

De Uitgever verzoekt storting van het abonnementsgeld op postgironummer **6593** Groningen. 14 dagen na ontvangst dezer aflevering zal over het bedrag worden gedisponeerd met 15 cent verhoging voor incassokosten.

52. Als a, b en c de zijden van een driehoek zijn, zijn de wortels van $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\,x + c^2 = 0$ imaginair. Bewijs dit.

53. Schets de grafiek van $y = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4x - 5}$.

54. De vorm $f(x) \equiv 3x^3 + ax^2 + 13x + b$ laat bij deling door $x^2 - x - 6$ tot rest $47x + 99$. Bepaal a en b en los daarna de vergelijking $f(x) = 0$ op.

55. De grafiek van de functie $y = \frac{8x + 7}{x^2 + ax + b}$ heeft twee asymptoten evenwijdig aan de y-as, nl. $x = -1$ en $x = -2$. Bepaal a en b en teken de grafiek.

56. Van de vergelijking $ax^3 - x^2 - abx + b = 0$ is één der wortels $= -3$, terwijl de twee andere wortels elkaars omgekeerde zijn. Bepaal a en b en de andere wortels.

57. Welke betrekking bestaat tussen p en q, als de vergelijkingen $x^2 + px + p^2 = 0$ en $x^2 + qx + q^2 = 0$ één wortel gemeen hebben? Kunnen p en q beide reëel zijn?

58. Onderzoek de grafiek van de functie $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 4}$.

59. Herleid $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}}$. Als dit geschiedt door de vorm gelijk te stellen aan $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, enz., welke eigenschap wordt dan daarbij gebruikt? Bewijs deze.

60. De wortels van de vergelijking $2x^2 - 19x + 51 = 0$ zijn b groter dan die van de vergelijking $2x^2 - 3x + a = 0$. Bepaal a en b.

61. In een driehoek beschrijft men een rechthoek met twee hoekpunten op de basis en twee hoekpunten op de opstaande zijden. Als de hoogte van de rechthoek x is, voor welke waarde van x is dan de oppervlakte van de rechthoek maximaal?

62. De vorm $V \equiv (a + 2)\,x^4 - (a + 1)\,x^3 + 2bx^2 + (b + 14)\,x + 6$ is deelbaar door $(x + 2)$ en geeft bij deling door $(x - 1)$ tot rest -36. Bepaal a en b. Los daarna op de vergelijking $V = 0$.

63. Men zet op een lijnstuk a aan weerskanten een lijnstuk x af en maakt nu een rechthoek met 't middelste stuk tot basis en de uiterste stukken tot opstaande zijden. Voor welke waarde van x is de oppervlakte van die rechthoek zo groot mogelijk?

64. Gevraagd een vergelijking van de derde graad, waarvan één wortel 2 is en de andere wortels het drievoud zijn van die van de vergelijking $x^2 - 4x + 10 = 0$.

65. Welke kwadratische functie in x neemt de waarden 0, —2 en 0 aan, als men voor x opv. substitueert —1, 0 en 2? Bepaal ook de uiterste waarde van die functie.

66. De vorm $\dfrac{m(x-2)}{x^4 - ax^2 + a - 1}$ is onbepaald voor $x = 2$ en heeft tot grenswaarde ½. Bepaal a en m. Splits daarna de breuk in de som van drie breuken:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

67. Als gegeven is:
$x^4 + 3x^3 - 28x^2 + 18x + m \equiv (x^2 + ax + t)(x^2 + bx + t)$, bepaal dan m, a, b en t. Los daarna op de vergelijking: $x^4 + 3x^3 - 28x^2 + 18x + m = 0$.

68. De vorm $ax^2 + bx + c$ wordt 0 voor $x = 4$ en voor $x = 1$ en laat bij deling door $(x - 5)$ tot rest 12. Bepaal a, b en c. Welke rest laat de drieterm nu over bij deling door $(x - p)$? Voor welke waarde van p is deze rest minimaal?

69. Gegeven de vergelijking $x^2 - (3m - 2)x + (3m^2 - 3m - 2) = 0$. Voor welke waarde van m is $x_1^3 + x_2^3$ maximum?

70. Schets de grafiek van $y = \dfrac{3x-4}{x+4}$.

71. Gegeven: $x^2 - (a - 3)x - (a - 3) = 0$. Bereken $x_1^2 + x_2^2$. Voor welke waarde van a is deze som minimum? Gevonden wordt, dat de minimumwaarde —1 is voor $a = 2$. Hoe komt het, dat men hier voor de som van twee kwadraten een negatieve uitkomst vindt? Wat is dus op te merken omtrent de wortels van $x^2 + x + 1 = 0$? Los ook eens op $x^3 = 1$. Hoeveel zal x_i^{19} zijn (de 19e macht van één der imaginaire wortels).

72. Los x op uit: $\sqrt{\{x - \sqrt{(1 - x)}\}} = 1 - \sqrt{x}$.

73. Los x en y op uit:

$$\begin{cases} \dfrac{(5x - 3y + 1)(6x - 3y + 4)}{4x + 3y - 7} = 0. \\ 2x - y + 2 + \sqrt{2x - y + 3} = 5. \end{cases}$$

74. Schets de grafiek van

$$y = \frac{(x + 5)(x - 3)}{x - 4} \equiv x + 6 + \frac{9}{x - 4}.$$

75. Waar liggen in het XOY-vlak de punten (x, y), waarvoor $z^2 - 3z + (3x + 2y) = 0$ reële wortels heeft?
En waar de punten, zodat $z^2 - (2x - y + 1)z - (2x - y + 1)$ steeds positief is?

76. Als p een geheel positief getal is, is $px^{p+1} - (p + 1)x^{p+1}$ deelbaar door $(x - 1)^2$. Bewijs dit.

77. Hoe groot is het aantal oplossingen van $2x - y = 3$? Voor welk stel is nu $x^2 + y^2$ zo klein mogelijk?

78. Herleid $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$. Schat de waarde van $2^{-0{,}00001}$

79. Bewijs, dat $17(x^{23} - 1) - 23(x^{17} - 1)$ deelbaar is door $(x - 1)^2$.

80. Schets de grafiek van: $y = \frac{-x^2}{x^2 + 4x + 4}$.

81. Ga het teken na van de breuk $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4x - 5}$ door een grafische voorstelling te maken van teller en noemer afzonderlijk.

82. De vorm $V \equiv x^5 + ax^4 + 5(a - b)x^3 - (a + 3b)x^2 + bx + 12$ is deelbaar door $x^2 - x - 2$. Bepaal a en b. Los daarna de vergelijking $V = 0$ op.

83. De vergelijkingen $5x^3 - 5ax^2 - 2(3a - 10)x + 24a = 0$ en $x^2 - ax + 4 = 0$ hebben één gemeenschappelijke wortel. Bepaal a en los de vergelijkingen op.

84. Bepaal een homogene symmetrische functie van de derde graad, die als factor heeft $2x - y$ en die 1 wordt voor $x = y = 1$.

85. De vorm $ax^2 + bx + c$ bereikt zijn uiterste waarde voor $x = -1$ en geeft bij deling door $x + 2$ tot rest 9. Verder kan de vorm ontbonden worden in twee gelijke factoren van de eerste graad in x. Bepaal a, b en c.

86. Gegeven de vergelijking $3x^2 - (a - 1)x + 2a - 13 = 0$. Voor welke waarde van a is de som van de kwadraten der wortels zo klein mogelijk?

87. Voor welke waarden van m kan $(m - 2)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 5$ niet nul worden voor reële waarden van x?

88. De functie $y = \frac{x^2 - 2x + p}{x^2 - 8x + 15}$ heeft 10 als uiterste waarde. Bepaal p en onderzoek de grafiek van de functie.

89. Door $y = (a - 1)\,x^2 - (a + 2)\,x + (a - 6)$ worden, als we a laten variëren van $-\infty$ tot $+\infty$, allerlei parabolen voorgesteld. Welke waarden moeten we aan a geven, opdat hierdoor parabolen worden voorgesteld, die geheel boven de X-as liggen?

90. De functie $y = \frac{ax^2}{x^2 - 4}$ wordt grafisch voorgesteld door een kromme, die de lijn $y = 2$ tot horizontale asymptoot heeft. Bepaal a en teken de grafiek.

91. Welk verband is er tussen de grafieken van de functies $y = 0{,}000001\,x^2 + 2x - 3$ en $y = 2x - 3$.
Schat de nulpunten van de eerste functie. Laat zien, dat één der wortels tot ∞ nadert, als in $ax^2 + bx + c$ de coëfficient a tot nul nadert. (Onder een „nulpunt" van een functie in x verstaat men de waarde van x, waarvoor die functie nul wordt).

92. Bewijs, dat $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ deelbaar is door $a + b + c$ en bepaal het quotient zonder de deling uit te voeren.

93. In welk geval is $ax^2 + bx + c \equiv px^2 + qx + r$?
Wanneer hebben beide leden dezelfde nulpunten?
Wanneer hebben ze één nulpunt gemeen?
Wanneer is $ax^2 + bx + c = 0$?
Wanneer is $ax^2 + bx + c \equiv 0$?

94. De wortels van de vergelijking $x^2 - 2\,(p + 1)\,x - 67\frac{1}{2}\,p = 0$ zijn s maal zo groot als die van $x^2 - px - 7\frac{1}{2}\,p = 0$. Bepaal p en s.

95. Bepaal met maximum van $5 - (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)^2$ met de bijbehorende waarden van x.

96. Als de lijn, voorgesteld door $y = mx$, moet raken aan de kromme, voorgesteld door $y = x^2 - 3x + 4$, bepaal dan de waarde van m.

97. Voor welke waarden van x is $\frac{x^2 + 2x - 15}{(x - 6)(3x^2 + 9x + 7)} \gtrless 0$?

98. Voor welke gehele waarden van x is
$$3x^2 + 4x < 84 \text{ en tevens } x^2 - 17x < 84?$$

99. Voor welke waarden van a kan de breuk

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^3 - (a - 2)\,x^2 - 10x + a^2 - 1}$$

vereenvoudigd worden?

100. Zijn de vergelijkingen $3x - 5y - 7 = 0$ en $6x - 11y - 14 = 0$ strijdig?
Aan de eerste vergelijking wordt voldaan door $x = 9$ en $y = 4$. Welke oplossingen ziet ge nu ook direct? Wat is hiervan de meetkundige betekenis? Waarom gaat de rechte $15x - 12y = 7$ niet door zulke z.g. roosterpunten?

101. Los x op uit: $x + 3 + \sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}} = \dfrac{20}{x-3}$.

102. De vorm $2x^5 - ax^4 + bx^2 - 7$ geeft bij deling door $(x - 1)$ tot rest 2 en bij deling door $(x - 2)$ tot rest 61. Bepaal a en b en vervolgens de rest bij deling door $(x - 2)\,(x + 1)\,(x - 1)$ zonder de deling uit te voeren.

103. De grafische voorstelling van de functie

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - x + 1}$$

snijdt de X-as in A $(-1{,}0)$ en de Y-as in B $(0{,}2)$. Verder is de lijn $y = -1$ een asymptoot. Bepaal a, b en c en schets de grafiek.

104. Voor welke waarde(n) van m verhouden zich de wortels van de vergelijking $x^2 - (m + 1)\,x + m^2 - 7m + 6 = 0$ als 3 en 2?

105. De grafische voorstelling van de functie

$$y = \frac{ax^2 + (b - 1)\,x - 6}{x^2 + (a + 3)\,x - (2b + 1)}$$

snijdt de X-as in A $(+\,2{,}0)$ en heeft voor $x = -5$ een verticale asymptoot. Bepaal a en b en schets de grafiek.

106. Van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2\,ax - (a + 1)\,y + a - 1 = 0 \\ (3a + 4)\,x - (3a + 1)\,y - 2a + 3 = 0 \end{cases}$$

verhouden x en y zich als 5 en 7. Bepaal a en de wortels x en y.

107. Gegeven de parabool $y = x^2 - 10x + 21$. Men vraagt de vergelijking te bepalen van de parabolen, die de X-as in de-

zelfde punten snijden als de gegeven kromme, terwijl hun uiterste waarde, absoluut genomen, het dubbele is.

108. Voor welke waarden van x is

$$\frac{2x - 5}{x - 1} > 3?$$

Toelichten met een grafische voorstelling.

109. Bewijs, dat $x^2 - (p + q)\, x + p^2 - pq + q^2$ positief is voor alle reële waarden van x, als p en q ongelijke reële getallen zijn.

110. Bepaal a, b en c zodanig, dat de vorm:

$(a + b)\, x^2 + (2a + b)\, xy + cy^2 - x + 13y - 15$

deelbaar is door $2x - y + 5$.

111. De functie $y = ax^2 + \frac{8}{3}\, x + c$ bereikt zijn maximum 4 voor $x = 3$. Bepaal a en c en schets de grafiek.

112. Bewijs, dat elke macht van 5, verminderd met 5, deelbaar is door 20.

113. De grafiek van de functie $y = ax^2 + bx + c$ snijdt de X-as in A (—4,0) en B (+ 2,0) en de Y-as in C (0,—8). Bepaal a, b en c en schets de grafiek. Daarna ook die van

$$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}.$$

114. De vergelijking $x^2 + px + q = 0$ gaat over in een zuivere vierkantsvergelijking, als men de wortels met 3 vermeerdert en in een onvolledige, als men ze met 3 vermindert. Bepaal p en q.

115. Onderzoek de grafiek van de functie

$$y = x + (10 - 2x)^{1/2}$$

116. Schets de grafiek van $y = \frac{x - 1}{x + 1}$ en daarna die van $y = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

117. De functies $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ en $y^1 = x^3 + x^2 - 22x - 40$ hebben hetzelfde nulpunt. Schets de grafieken.

118. Bepaal na vereenvoudiging het teken van

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$$

voor verschillende waarden van x.

119. Voor welke waarden van m heeft de vergelijking $mx^2 - 4(m + 5)x + m + 3 = 0$ reëele wortels? Voor welke waarden van m heeft deze vergelijking wortels, die verschillend teken hebben?

120. Voor welke waarden van a, b en c is

$$ax^2 + bxy + cy^2 - x + 19y - 15$$

deelbaar door $x + 2y - 3$?

Waar liggen de punten P (x, y), waarvoor

$$(x + 2y - 3)(2x - y + 5) \gtrless 0 \text{ is?}$$

121. Splits $\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ in enkelvoudige breuken.

122. De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ gaat door de punten $(1, -2)$ en $(2, -1)$, terwijl de uiterste waarde van de functie bereikt wordt voor $x = 2$. Bepaal a, b en c en teken de grafiek.

123. De vergelijkingen $x^2 + (a - 1)x + b - 1 = 0$ en $2x^2 + (3a - 2b)x + 4(a - b) = 0$ hebben dezelfde wortels. Bepaal a en b.

124. Is het mogelijk, dat $mx^2 + (m - 1)x + (m - 1) > 0$ is voor alle waarden van m en alle waarden van x?

125. De vormen $x^2 - (a + 2)x + 2a + 4$ en $x^2 - 4ax + 8a + 4$ hebben een even groot minimum. Bepaal a. Breng daarna de functies in tekening.

DIDACTISCHE CAUSERIEËN

DOOR

Dr. D. P. A. VERRIJP.

IV.

Men heeft mij gevraagd óók van de opgavèn van het schriftelijk eindexamen H.B.S. B 1936 voor wiskunde en mechanica een analyse te geven. [1]) Ik deel hierbij mede, dat ik daaraan niet kan voldoen.

Iets anders is echter het volgende. Bij het nazien van het algemeen schriftelijk werk van 66 candidaten heb ik voor mij zelf opmerkingen van algemeenen aard gemaakt, die ik ook wel aan enkele mijner vroegere collega's heb meegedeeld. Oplossingen van een tweetal vraagstukken gaven in het bijzonder aanleiding tot dergelijke opmerkingen. Het zijn deze, die ik nu ook in wat ruimeren kring wensch kenbaar te maken.

Het eene vraagstuk, dat zulke oplossingen te zien gaf, was de opgave Trigonometrie 1. b. Het geheele vraagstuk luidde aldus:

1. Van de scherphoekige driehoek ABC is hoek B tweemaal zo groot als hoek A. De zijde AB is gelijk aan c. AD is de hoogte(lijn) uit A en BE is de hoogte(lijn) uit B.

a. Bewijs, dat het oppervlak van vierhoek ABDE gelijk is aan

$$\tfrac{1}{2}\, c^2 \sin A \sin 2\,A \sin 3\,A.$$

b. Als verder gegeven is, dat het oppervlak van deze vierhoek ook gelijk is aan

$$\tfrac{1}{2}\, c^2 \sin^2 2\,A \sin 4\,A,$$

bereken dan hoek A.

Een geschikte oplossing van 1. b is blijkbaar die, welke de vergelijking

$$2 \sin A \sin 3\,A = 2 \sin 2\,A \sin 4\,A$$

---

[1]) In mijn vorig artikel (12e jg. no. 6) verandere men op blz. 253 regel 11 v.o. de twee letters A in G.

Ondergetekende, abonné op { **Compositio Mathematica**
Nieuw Archief voor Wiskunde
„Christiaan Huygens"
„N. T. voor Wiskunde"
„Euclides"

verzoekt toezending van 1 exemplaar: *)

De Vries, Inleiding tot de studie der meetkunde v/h aantal

geb. in heel linnen à f 4.90 (gewone prijs is f 5.75)
ingenaaid . . . à f 3.90 („ „ „ - 4.75)

door bemiddeling van de boekhandel

direct per post,

....

Naam: Woonplaats:

....

*) S.v.p. door te halen wat niet wordt verlangd
Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex., mits besteld vóór 1 Febr. 1937; voor Indië vóór 1 April 1937.

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.

1½ cts.
postzegel

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

POSTBUS 39

Giro Ned. Bk. No. 1858
Post Giro No. 6593

GRONINGEN.

doet ontstaan, want — in 1935 kwam zoo'n herleiding ook al (meer dan eens!) te pas — men kan dan daarvoor schrijven

$$\cos 2\,A - \cos 4\,A = \cos 2\,A - \cos 6\,A;$$

dus $$4\,A = 2\,k \times 180^\circ \pm 6\,A,$$

waaruit na eenige herleiding en overweging alleen $A = 36^\circ$ volgt.

Men kan uit

$$\sin A \sin 3\,A = \sin 2\,A \sin 4\,A$$

natuurlijk ook afleiden (we gaan, als boven, nul-stelling van den deeler, als niet voldoende, stilzwijgend voorbij)

$$\sin 3\,A = 2 \cos A \sin 4\,A$$
$$\sin 3\,A = \sin 5\,A + \sin 3\,A$$
$$5\,A = k \times 180^\circ \text{ enz.}$$

Maar velen lieten uit de de onmiddellijk te verkrijgen vergelijking — soms na ettelijke regels schrift — ontstaan de vergelijking

$$16 \cos^4 A - 12 \cos^2 A + 1 = 0$$

of ook wel

$$4 \cos^2 2\,A + 2 \cos 2\,A - 1 = 0.$$

Beschouwen we de eerste dezer beide vergelijkingen. Men vindt

$$\cos^2 A = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

En nu was het merkwaardig, dat men dan verder eerst $\sqrt{5}$ logarithmisch, daarna $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}$ en dan verder A weer logarithmisch ging berekenen. Zeldzaam omslachtig, afgezien nog van het begaan van onnauwkeurigheden of rekenfouten van allerlei aard!

Ik vind het echter niet zoo erg, dat men dezen ongeschikten weg insloeg, als wel, dat men, eenmaal op dien weg zijnde, er zich niet op een, m.i., behoorlijke manier uitredde. Want vooreerst had men — vroeger geleerde algebra-kennis toepassende — eerst, na

$$\cos^2 A = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8},$$

moeten opschrijven

$$\cos A = \tfrac{1}{4}\,(1 + \sqrt{5}) \text{ en } \cos A = \tfrac{1}{4}\,(-1 + \sqrt{5})$$

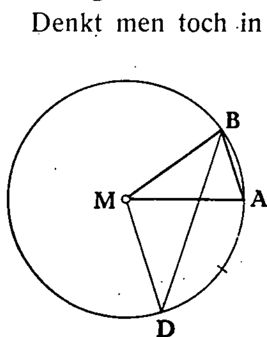
(de negatieve wortels voldoen hier natuurlijk zèker niet) en dàn had moeten volgen

$$A = 2k \times 180^\circ \pm 36^\circ \text{ en } A = 2k \times 180^\circ \pm 72^\circ.$$

(Verdere overweging geeft weer $A = 36^\circ$).

Immers, dat uit $\sin x = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$ en $\sin x = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ resp. voortvloeit, als waarde van het eerste kwadrant, $x = \frac{1}{2} \times 36^\circ$ en $x = \frac{1}{2} \times 108^\circ$, volgt onmiddellijk uit een behoorlijke planimetrie-kennis. (Wat dan verder $\cos A =$ enz. oplevert, is duidelijk. [1])) Wellicht, dat een mijner vroegere collega's een bedenkelijk gezicht zet bij den eisch, dien men mag stellen omtrent de kennis van de formule van de tweede diagonaal van den regelmatigen ingeschreven tienhoek in een cirkel met straal r, maar dan moet ik hem toch meedeelen, dat ik zelf, bij de behandeling van den regelm. tienhoek, nooit verzuimde de volgende eenvoudige fraaie afleiding van die formule te behandelen:

Denkt men toch in het bekende figuurtje ($\angle AMB = 36^\circ$) de bisectrix BC [2]) verlengd tot haar snijpunt D met den cirkel, dan ziet men gemakkelijk in, dat BD die tweede diagonaal is. (Bg $AD = 2 \angle ABD = 2 \times 36^\circ$). Verder is $\triangle MCD$ gelijkbeenig ($\angle AMD = 72^\circ = \angle MCD$), dus heeft men



$$BD = BC + CD = \frac{1}{2} r (-1 + \sqrt{5}) + r = \frac{1}{2} r (1 + \sqrt{5}).$$

Wat is nu de les, die men uit deze beschouwing kan putten? Wel, dat al dat inkrimpen van programma's tot ongewenschte resultaten leidt. Opzettelijke planimetrie b.v., heet het, wordt op het H.B.S.-eindexamen niet meer gevraagd. Ja wel, maar de candidaat ondervindt er toch niet anders dan ongerief of nadeel van, wanneer hij de op de school geleerde (en *te* leeren!) wiskunde niet tot zijn volle beschikking heeft. Zoo straft het kwaad — als zoo dikwijls — zich zelf, al laten examinator en deskundige dit den candidaat niet in het waardeeringscijfer bemerken.

---

[1]) Natuurlijk wordt ook veel moeite voorkomen, als men $\sqrt{5}$ rechtstreeks bepaalt en dan verder, ter bepaling van A uit cos A, met een directe tafel werkt.

[2]) De teekenaar vergat de plaatsing van de letter C.

In den tijd, waarin ik leerling van de (eenige!) H.B.S. met 5 j. c. voor jongens te 's-Gravenhage was (1883—1886), wist men niet van inkrimpen van programma's of het bepalen van onderwerpen, die niet op het schriftelijk examen gevraagd zouden worden (ook niet van „vrijstellingen") en evenmin bestond daarvan iets, toen ik in de jaren '92—'96 leeraar aan een H.B.S. was. Combinatieleer, binomium van Newton (hoe fundamenteel zijn deze onderwerpen niet voor vele leerlingen met het oog op latere studie!) en wat al niet meer, werd aan de leerlingen geleerd. Zoolang als ik leeraar aan een gymnasium geweest ben, is mijn gemoedsrust door dergelijke, m.i. fnuikende, bepalingen ten opzichte van mijn eigen B-onderwijs niet gestoord geweest, maar, naar ik einde '34 bemerkte, heeft de bacil nu ook dàt onderwijs eenigermate aangetast.

Veelal is de tegenwerping, dat de functioneele beschouwing van verschillende vormen tijd van behandeling eischt, die elders moet uitgespaard worden. Ik ontken de volstrekte noodzakelijkheid daarvan. Mijn wiskunde-leeraar had ons b.v. óók wel de extreme waarde van een tweedegraadsfunctie op twee manieren leeren bepalen en bij mijn eigen onderwijs heb ik nooit anders gedaan dan wat latere wettelijke bepalingen noodzakelijk maakten.

Neen, de oorzaak van den drang naar inkrimpen of vergemakkelijken zit natuurlijk in het verlaagde intellectueele peil der leerlingen, ontstaan door de verveelvuldiging van hun onvoldoend geselecteerd[1]) aantal, zoodat de docent veel tijd noodig heeft om door het oplossen van tal van vraagstukken aan de zwakke leerlingen de noodige oefening te geven.

Intusschen kom ik op deze kwestie van tijdwinning straks nog even terug.

Ten opzichte van een ander vraagstuk vermeld ik het volgende.

---

[1]) Het is merkwaardig, dat elke poging tot verbetering schipbreuk leidt. Zoo zag ik in het Ochtendblad B der N.R.C. van 6 Aug. j.l., dat de principieele conclusie van het in het Avondblad C van 3 Aug. voorkomende rapport van de commissie inzake scholenorganisatie, welke commissie ingesteld was door het Ned. Onderwijzersgenootschap — en welk rapport geheel in de reeds tal van jaren door mij verdedigde richting (van splitsing) gaat —, door de vergadering werd verworpen. Als eenig argument van het ongunstig oordeel las ik de onzinnige uitspraak, „dat men niemand bevoegd achtte deze scheiding uit te voeren". Waarom dan ook, men *wil* eenvoudig *niet* objectief oordeelen!

Het betreft het tweede vraagstuk der Beschrijvende meetkunde. De opgave luidde aldus:

Neem de lange zijde van het papier verticaal.

Een vlak W snijdt de as van projectie in een punt, 15 cm van de linkerkant van het papier gelegen. De horizontale doorgang maakt met die as een hoek van 30°; de verticale doorgang maakt met die as een hoek van 60°; de opening is beide malen naar links.

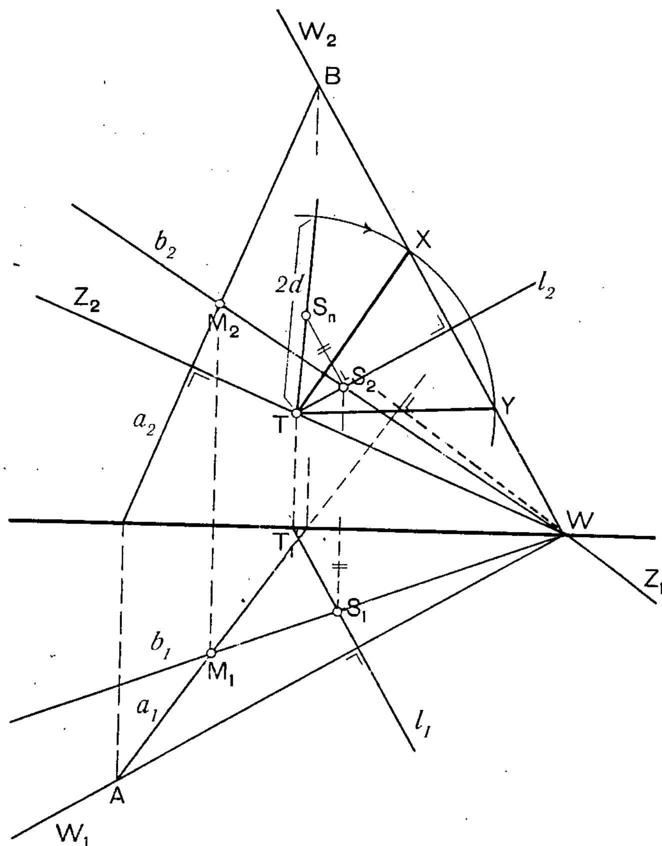
Construeer de projecties van de bis(s)ectrice van de scherpe hoek, die door de beide doorgangen wordt gevormd.

Door deze bis(s)ectrice brengt men een (het) vlak Z, dat loodrecht op vlak W staat.

Bepaal in het verticale projectievlak een punt T, dat in vlak Z ligt en 3 cm boven de as van projectie is gelegen.

Construeer uit T een lijn, die de verticale doorgang van vlak W snijdt en met vlak W een hoek van 30° maakt.

Hoe werd dit vraagstuk nu in het algemeen opgelost? Neerslaan van W in V_1, bisectrix teekenen, weer terugwentelen. Een lijn



Tweede vraagstuk 1936. Op halve grootte.

door een willekeurig punt van de bisectrix loodrecht W teekenen, dan Z aanbrengen. T gemakkelijk te teekenen. Dan, met behulp van een beschouwd kegelvlak, in het neergeslagen vlak W de snijpunten van de gevraagde lijn met den neergeslagen verticalen doorgang bepalen en weer terugwentelen.

Zonderling, zou men zoo zeggen, dat *geen* der 66 candidaten de eenvoudigste constructie volgde: Gelijke stukken WA en WB op de doorgangen van W afpassen. De projecties van de verbindingslijn AB $= a$ teekenen. Het midden M van AB (in projecties) met het punt W (op de as gelegen) verbinden. Dan de doorgangen van Z direct teekenen als lijnen door het punt W loodrecht op de projecties der zoo even genoemde verbindingslijn a. En nadat T geteekend is, eenvoudig (uit T) de dubbele (te construeeren) afstand d van T tot het vlak W (d.i. tot de bisectrix, dus $d =$ TS) omcirkelen in V_2.

Hoe is 't nu te verklaren, dat men aan deze oplossing niet dacht? Eenvoudig daardoor, dat men de beschrijvende meetkunde te veel als afzonderlijk vak is gaan beschouwen. Machinaal zijn de leerlingen erdoor gewoon geraakt: Vlakken neer te slaan, dan constructies uit te voeren, weer terug te wentelen, te werken met kegelvlakken enz., zonder er zich een oogenblik eens rekenschap van te geven, dat de beschrijvende meetkunde niet anders is dan een onderdeel — en wel een zeer *beperkt* onderdeel — van de meetkunde in het algemeen (planimetrie en stereometrie). Zie, op dit gebied zou nu met succes voor tijdwinning ten opzichte van een, tegenwoordig noodzakelijke, uitbreiding der schoolwiskunde (functioneele beschouwing, differentiaal- en integraalrekening) inkrimping kunnen plaats hebben en, hier nu, zonder gevaar voor vermindering van *stof*. Want de stof, die de beschrijvende meetkunde behandelt, is *niets nieuws*; of men er veel of weinig aan laat doen, verandert noemenswaard, noch aan de kennis, noch aan 't inzicht der leerlingen. Het is dan ook zóó, dat een B-abiturient van het gymnasiaal onderwijs dit vak — zoo hij 't noodig heeft — in een paar dagen machtig is. Dat de beschrijvende meetkunde aldus moet beschouwd worden, heeft ook Beth ingezien toen hij, na eerst zijn congresvoordracht (1934) gehouden te hebben, later zijn stereometrie-boek schreef.

Ik wil nog even de aandacht vragen voor iets geheel anders. In afl. 1 van dezen jaargang behandelt Wijdenes de vraag: AB of $\overline{AB}$ en komt dan tot de conclusie, dat de streepjes-notatie onnoodig is.

M.i. hangt het antwoord af van het onderwerp, dat men behandelt. Behandelt men de gonio- en trigonometrie op de volmaakt algemeene wijze, die in mijn leerboek is gevolgd, dan zal men wel onderscheid *moeten* maken tusschen gerichte lijnstukken (eventueel ook „gezinde" — niet „gerichte", in 't Duitsch zegt men „orientierte" — hoeken), zooals dat gebeurt bij algemeene definities, stellingen en bewijzen, en anderszins: zijden of lijnstukken (eventueel hoeken), die in welke richting (of zin) ook genomen, steeds positief worden beschouwd. Juist in den vierden druk, waarin ik er naar gestreefd heb, alle onderscheiding behoorlijk te laten uitkomen, ben ik tot de streepjes- (en, waar noodig, ook de pijltjes-) notatie overgegaan.

Ik kan overigens nog dit meedeelen: In het voorjaar van 1928 is door de gezamenlijke wiskunde-vereenigingen een nomenclatuurcommissie ingesteld, die allicht ook de notaties zou hebben moeten behandelen. Door de commissie is wel materiaal verzameld, maar tot verderen arbeid is ze nooit gekomen. De reden hiervan is, dat (zooals later bleek) in September van dat jaar op het internationaal mathematisch congres te Bologna was voorgesteld, dat de C. I. E. M. (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique) deze zaak in studie zou nemen en dat men bij ons een afwachtende houding wilde aannemen. Ik heb wel eens getracht informaties in te winnen, hoe het met het werk van deze intern. commissie stond, maar ik ben er nooit achter gekomen, of resultaat bereikt is. Blijkbaar — onze commissie voelde dat destijds ook — deden zich te veel moeilijkheden voor om tot algemeene positieve resultaten te komen.

PROTEST.

Op 21 September van dit jaar heeft, ter gelegenheid van de rectoraatsoverdracht, de rector magnificus der Leidsche universiteit prof. mr. A. S. de Blécourt voor het forum der wetenschappelijke wereld een rede gehouden, waarbij menig toehoorder en zoo ook menig lezer van het verslag der rede een gerechtvaardigd protest

in zich moet hebben voelen opkomen, in het bijzonder in verband met de plaats, die voor die rede gebezigd is. Ware ze elders gehouden, dan zou men — we kennen eenmaal die „Mathematikfeindlichkeit" — slechts de schouders hebben opgehaald.

Thans is het niet onmogelijk, dat wij bij gelegenheid op die rede terugkomen, nu ook daarom, omdat een dagbladartikel er op aan het „doorhollen" is gegaan.

AB of $\overline{AB}$?

Gaarne neem ik het, door den heer Wijdenes op blz. 11 van dezen jaargang verleende woord. In hoofdzaak beperk ik mij tot bespreking van eenige zijner opmerkingen, die mij direct betreffen.

De op blz. 6 genoemde inconsequentie in mijn meetkunde boekjes is natuurlijk niet te ontkennen. In het voorbericht bij den eersten druk kan men trouwens lezen, dat „naar uiterste consequentie in zake een zekere mate van strengheid niet is gestreefd." Zoo zijn voor „cirkelboog", „grootte van een cirkelboog" en „lengte van van cirkelboog" geen verschillende notaties ingevoerd. Deze begrippen toch worden veel minder gebruikt en — wat het voornaamste is — komen veel later ter sprake dan „lijn" en „lijnstuk". Alles heeft zijn grens en bij het schoolonderwijs moet men die niet te ver zoeken.

Komen we tot het voornaamste punt: dezelfde notatie of verschillende notaties voor „lijn" en „lijnstuk"? Geen citaten uit de werken van wereldberoemdheden kunnen mijn opvattting wijzigen, dat men eenigszins anders moet schrijven voor kinderen van twaalf jaar dan voor geschoolde wiskundigen. De heer Wijdenes acht het verschil tusschen lijn en lijnstuk nu wel zoo duidelijk, dat de, door sommigen onzer gebruikte, streepjes dienen te verdwijnen. Zou het niet consequent zijn dan maar weer uitsluitend het woord „lijn" te gebruiken? Blijkbaar is dit niet zijn bedoeling, want hij schrijft: „de tijd is nu wel volkomen voorbij, dat men een lijn middendoor deelt". Inderdaad heeft hij in de laatste, laat ons zeggen acht jaar, in zijn boeken betreffende wijzigingen aangebracht, maar hij zij toch niet te optimistisch. Zelfs de heer Beth — sinds vele jaren strijder voor grootere strengheid in ons onderwijs der exacte vakken — deelde nog heel wat lijnen middendoor in het leerboek der mechanica dat hij met den heer van Loo in 1933

deed verschijnen en gedurende dezen cursus wordt die editie nog gebruikt voor het laatste leerjaar. Eerst in den onlangs uitgekomen tweeden druk is het gelukt wat strenger te zijn. Ook vergete de heer Wijdenes niet, dat al krijgen de leeraren het verschil langzaam aan goed onder de knie, het elk jaar voor de leerlingen der eerste klasse weer nieuw is.

Mijn geachte opponent wil schrijven $AB^2 = CB^2 + CA^2$ in plaats van $\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2$. Toegegeven zij, dat een leerling die na anderhalf jaar onderwijs in meetkunde nog wil trachten een lijn te kwadrateeren, van werkkring dient te veranderen. Echter lijkt het mij ongewenscht de streepjesnotatie na aanvankelijk gebruik later voor sommige gevallen weer uit te schakelen. Er is bovendien iets anders. Reeds dertig jaar geleden liet mijn leermeester W. J. Wisselink — bij mij in dankbare herinnering — ons in de stelling van Pythagoras, de projectiestelling, de formule van Stewart enz. dergelijke streepjes plaatsen, vermoedelijk ten einde netheid en duidelijkheid van geschreven werk te bevorderen.

Nog een paar opmerkingen. Bij de behandeling van een vraagstuk in de klas, kan het opstellen van het onderstelde door gebruik van streepjes soms een zeer fijn spelletje worden, waarvoor ook de leerlingen vaak belangstelling toonen. B.v. kan men beginnen met eenige overbodige streepjes te plaatsen om later tot het noodige te reduceeren. Er zijn vele dergelijke toepassingen.

Op blz. 5 staat: „Haalmeïjer gebruikt dus dezelfde notatie voor de betekenissen 2 en 3". Dit blijft voor rekening van den schrijver. De beteekenis 3 toch, begrijp ik niet. Misschien wil de heer Wijdenes ons nog eens duidelijk maken wat hij verstaat onder de lengte van een lijnstuk, zonder daarbij te denken aan een aantal eenheden. Ik vraag niet wat hij bedoelt met de mededeeling dat twee lijnstukken gelijke — of ongelijke — lengten hebben, maar wat hij hier verstaat onder de lengte van een lijnstuk.

Op blz. 2 lees ik: „In de tweede betekenis is het lijnstuk AB de verzameling punten *tussen* [1]) A en B; daarbij wordt in het geheel niet gedacht aan enig maatbegrip, zoals in de derde (en vierde) betekenis. We nemen een voorbeeld: de meetkundige plaats van de toppen P van stomphoekige gelijkbenige driehoeken met basis AB bestaat uit twee lijnstukken; de lezer vulle de rest aan. De

---

[1]) Cursiveering van mij.

PROSPECTUS

INLEIDING TOT DE FUNCTIETHEORIE

DOOR

DR. C. H. VAN OS

Hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft



Prijs van het complete boek, groot, 253 pagina's *f* 4.90, geb. *f* 5.75

P. NOORDHOFF N.V. - 1935 - GRONINGEN-BATAVIA

Verkrijgbaar in de boekhandel.

In Ned. Oost-Indië uit voorraad verkrijgbaar bij N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF, Laan Holle 7, Batavia C.

VOORWOORD.

Dit leerboek is bestemd voor de Delftse studenten die een examen in Functietheorie moeten afleggen. Wellicht zal het ook voor studenten aan de Universiteiten van enig nut kunnen zijn als inleiding in dit deel der wiskunde. Hier en daar heb ik ook gedacht aan leraren, die hun inzicht in het rekenen met complexe getallen nog eens zouden willen opfrissen.

Dat ik van bestaande leerboeken een dankbaar gebruik gemaakt heb, spreekt wel vanzelf. In het bijzonder noem ik de „Cours d'Analyse" van Goursat en de „Modern Analysis" van Whittaker en Watson. Bij de uiteenzettingen aan het begin heb ik mij in hoofdzaak aangesloten bij het werk „Het Getalbegrip" van Prof. Dr. F. Schuh.

Verder spreek ik mijn dank uit aan de firma P. Noordhoff voor de uitnodiging tot het schrijven van dit boek en voor de wijze, waarop aan mijn wensen tegemoet is gekomen; en aan den heer Ir. J. Bloemsma, assistent aan de Technische Hogeschool, voor het maken der tekeningen.

Ch. H. van Os.

INHOUD.

In de tweede plaats beschouwen wij het geval, dat $z = -1$, $n = 2$. Wij hebben dan, als wij voor $\theta =$ arg. z de waarde π nemen:

$$w = \sqrt{-1} = 1 \, . \left(\cos\frac{\pi + 2mx}{2} + i \sin\frac{\pi + 2m\pi}{2}\right).$$

Door aan m achtereenvolgens de waarden 0 en 1 te geven, vinden wij voor w resp. $+ i$ en $- i$. Wij zien dus, dat het onjuist is, zoals in sommige leerboeken der algebra geschiedt, het getal i te *definiëren* door de vergelijking $i = \sqrt{-1}$, daar ook het getal $- i$ door het symbool $\sqrt{-1}$ kan worden aangeduid.

Door het symbool $\sqrt[n]{z}$ worden dus in het algemeen n getallen aangeduid. De vraag rijst, of het ook voor niet-positieve waarden van z mogelijk is, om, evenals wij dit zoeven voor positieve waarden gedaan hebben, één der n getallen uit te kiezen om in het bijzonder door het symbool $\sqrt[n]{z}$ aangeduid te worden. Wij zullen op deze vraag in het volgende hoofdstuk terugkomen en dan zien, dat een eenvoudige afspraak, die voor *alle* waarden van z tot een bepaald resultaat leidt, niet mogelijk is. Voorlopig doen wij daarom het beste, de verschillende waarden van $\sqrt[n]{z}$ op dezelfde voet te behandelen.

Deze meerwaardigheid van $\sqrt[n]{z}$ heeft tengevolge, dat verschillende formules, die uit de algebra der reële getallen bekend zijn, thans slechts met voorzichtigheid kunnen worden toegepast. Wij zullen dit aan enkele voorbeelden toelichten.

In de eerste plaats beschouwen wij de formule:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

Nemen wij hierin $a = z = -1$, dan vinden wij:

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{+1}.$$

Zoals wij zoeven zagen, heeft $\sqrt{-1}$ de beide waarden $+ i$ en $- i$. Vullen wij voor elk der beide factoren in het linkerlid elk dezer waarden in, dan vinden wij voor het product de beide waarden $+ 1$ en $- 1$. Zal de formule dus gelden, dan moeten wij in dit geval aan $\sqrt{+1}$ elk der beide waarden $+ 1$ en $- 1$ toekennen, dus afwijken van de algemene afspraak omtrent de wortels uit een positief getal.

In de tweede plaats beschouwen wij de formule:

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}.$$

Is a niet positief, dan heeft het linkerlid dezer vergelijking 4 verschillende waarden, het rechterlid daarentegen slechts 2. Stellen wij $\sqrt{a} = w$, dan is $w^2 = a$, dus $w^4 = a^2$. Uit deze laatste vergelijking volgt, dat wij het getal w door het symbool $\sqrt[4]{a^2}$ kunnen voorstellen. De beide waarden van het rechterlid $\sqrt{a}$ zijn dus ook waarden van het linkerlid $\sqrt[4]{a^2}$; daarnaast heeft dit linkerlid echter nog twee waarden, die niet door $\sqrt{a}$ kunnen worden voorgesteld. Gemakkelijk ziet men, dat men deze krijgt, door de beide waarden van $\sqrt{a}$ met i te vermenigvuldigen.

In de derde plaats beschouwen wij de formule:

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3}.$$

Is a niet positief, dan heeft het linkerlid dezer vergelijking 4 verschillende waarden, het rechterlid 6. Zij:

$$a = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Wij hebben dan:

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{r}\,.\left\{\cos\left(\frac{2\theta + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\theta + 2k\pi}{4}\right)\right\}.$$

$$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{r}\,.\left\{\cos\left(\frac{3\theta + 2k'\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\theta + 2k'\pi}{6}\right)\right\}.$$

Deze beide getallen zijn aan elkander gelijk voor $k = 0$, $k' = 0$ en voor $k = 2$, $k' = 3$. Voor alle andere stellen waarden van k en k' zijn de beide getallen *niet* aan elkander gelijk. Er zijn dus slechts 2 waarden van het linkerlid der beschouwde vergelijking, die elk aan een waarde van het rechterlid gelijk zijn.

Evenals dit in de algebra der reëele getallen gewoonte is, zullen wij ook hier *negatieve en gebroken exponenten* invoeren. Wij stellen m.a.w.:

$$\frac{1}{z} = z^{-1},\quad \sqrt{z} = z^{1/2},\quad \sqrt[4]{z^3} = z^{3/4},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{z}} = z^{-1/3},\ \text{e.d.}$$

Het rekenen met negatieve gehele exponenten levert geen enkele moeilijkheid op. Daarentegen moet het rekenen met gebroken exponenten met omzichtigheid geschieden. Uit het voorafgaande volgt nl., dat niet altijd $z^{2/4} = z^{1/2}$ of $z^{2/4} = z^{3/6}$.

kwadrant aannemen. Laten z_0 en $z_0 + \Delta z$ de bijbehorende waarden zijn van het complexe getal z. Zij de scherpe $\angle XOP = \varphi_0$, de scherpe $\angle POQ = \Delta\varphi$. Wij hebben dan:

$$\text{arg. } z_0 = \varphi 0 = 2k\pi, \text{ arg. } (z_0 + \Delta z) = \varphi_0 + \Delta\varphi + 2k'\pi \quad . \quad (17).$$

Wij laten het punt Q thans naderen tot het punt P. In de formules (17) naderen dan Δz en $\Delta\varphi$ tot O. Houden wij hierbij k' constant, dan is het duidelijk, dat de bijbehorende waarde van arg. $(z_0 + \Delta z)$ nadert tot een bepaalde waarde van arg. z_0, en wel tot die, welke men vindt, door $k = k'$ te nemen. De waarde van arg. $(z_0 + \Delta z)$, die men vindt, door telkens $k' = 2$ te nemen, nadert bijv. tot de waarde van arg. z_0, die men vindt, door $k = 2$ te nemen.

Laten w_0 en $w_0 + \Delta w$ de waarden zijn van $\sqrt{z}$. die behoren bij de waarden z_0 en $z_0 + \Delta z$ van z. Wij hebben dan:

$$\text{arg. } w_0 = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{2}, \quad \text{arg. } (w_0 + \Delta w) = \frac{\varphi_0 + \Delta\varphi + 2k'\pi}{2} \quad (18).$$

Nadert nu weer Q tot P, dan ziet men hieruit gemakkelijk, dat de waarde van $(w_0 + \Delta w)$, die door een bepaalde constante waarde van k' gekarakteriseerd wordt, nadert tot de waarde van w_0, die gekarakteriseerd wordt door de waarde van k, die gelijk is aan de genoemde waarde van k'. En dit geldt voor elke waarde van k', dus voor elk der beide waarden van $(w_0 + \Delta w)$.

Indien dus twee punten z dicht bij elkander liggen, en men in elk dezer punten de beide waarden van $\sqrt{z}$ *berekent, zal elk der beide waarden in het ene punt zeer weinig verschillen van een der waarden in het andere punt, met dien verstande, dat het genoemde verschil tot 0 nadert, als men de beide punten tot elkaar laat naderen.* Wij zullen twee waarden, die een meerwaardige functie in naburige punten z aanneemt, *aaneensluitend* noemen, indien hun verschil tot 0 nadert, als men de beide waarden van z tot elkaar doet naderen.

Indien nu w een meerwaardige functie van z is, en wij de verandering van w bij verandering van z willen bestuderen, zullen wij steeds als volgt te werk gaan. Wij beginnen met bij de aanvangswaarde van z een zekere waarde van w uit te kiezen. Vervolgens vatten wij bij elke aangroeiïng van z die waarde van w in het oog, die bij de laatstbeschouwde waarde van w aansluit, en gaan zo door. Daarbij moet men natuurlijk elke afzonderlijke aangroeiïng van z zo klein nemen, dat ondubbelzinnig vaststaat, welke waarden van w bij elkander aansluiten.

In de praktijk is het in den regel gemakkelijk uit te maken, welke waarden van een meerwaardige functie bij elkander aansluiten. Zij bijv. weer $w = \sqrt{z}$, en schrijven wij de tweede der formules (2) nog eens over:

$$\arg. w = \frac{\arg. z + 2k\pi}{2}, \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

dan zien wij gemakkelijk, dat men aaneensluitende waarden van $\sqrt{z}$ krijgt, door arg. z met kleine bedragen te laten toenemen, en daarbij k constant te houden.

Wij zullen het zoeven ontwikkelde programma nu voor de functie $\sqrt{z}$ in een paar gevallen ten uitvoer brengen.

Zij A een punt van het z-vlak, dat wij, om een bepaald geval voor ogen te hebben, in het eerste kwadrant zullen aannemen (zie fig. 10), en zij de scherpe $\angle XOA = \psi$. Laten w_1 en w_2 de beide waarden zijn, die de functie $\sqrt{z}$ in het punt A aanneemt; zij verder $OA = r$. Wij hebben dan:

$$\left.\begin{array}{ll} |w_1| = \sqrt{r}, & \arg. w_1 = \frac{\psi}{2} \\ |w_2| = \sqrt{r}, & \arg. w_2 = \frac{\psi + 2\pi}{2} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (20).$$

Wij laten thans het punt z, van A uitgaande, een cirkel beschrijven, die O tot middelpunt en r tot straal heeft, en vatten bij elke nieuwe stap die waarde van $w = \sqrt{z}$ in het oog, die bij de laatstgevonden waarde aansluit. Als aanvangswaarde van w kiezen wij daarbij de waarde w_1. In de formule (19) moeten wij dan $k = 0$ stellen en arg. z, uitgaande van de waarde ψ, geleidelijk laten aangroeien.

Wij gaan zo door, tot wij de cirkel rond zijn geweest, d.w.z. tot arg. z met 2π is toegenomen. Dan is de eindwaarde van arg. $w = \frac{\psi + 2\pi}{2}$, d. i. juist arg. w_2. *Terwijl wij dus als aanvangswaarde van w de waarde w_1 hadden gekozen, vinden wij als eindwaarde de waarde w_2.*

Hadden wij daarentegen als aanvangswaarde van w de waarde w_2 gekozen, dus als aanvangswaarde van arg. w de waarde $\frac{\psi + 2\pi}{2}$, dan hadden wij als eindwaarde van arg. w gevonden de waarde $\frac{\psi + 4\pi}{2}$. De waarden $\frac{\psi + 4\pi}{2}$ en $\frac{\psi}{2}$ van arg. w geven echter de-

1e. Zij $\varphi(z)$ de som van de reeks:

$$\frac{z}{z+1}+\left(\frac{z^2}{z^2+1}-\frac{z}{z+1}\right)+\left(\frac{z^3}{z^3+1}-\frac{z^2}{z^2+1}\right)+\dots \quad (10).$$

Daar is m.a.w.

$$\varphi(z)=\lim_{n=\infty}\frac{z^n}{z^n+1} \quad \dots\dots \quad (11).$$

Is $|z|<1$, dan is $\lim_{n=\infty} z^n=0$, en dus $\varphi(z)=0$.

Is $|z|>1$, dan is $\lim_{n=\infty} z^n=\infty$, waaruit gemakkelijk volgt, dat dan $\varphi(z)=1$ is. De functie $\varphi(z)$ heeft dus overal de waarde 0 *binnen* de cirkel $|z|<1$, en overal de waarde 1 *buiten* de cirkel $|z|>1$. De lezer tone aan, dat de reeks (10) uniform convergeert binnen elke cirkel met O tot middelpunt en straal $r<1$, en evenzo buiten elke cirkel met O tot middelpunt en straal $r>1$.

De punten, waarvoor $|z|=1$, zijn *singuliere punten* van de functie $\varphi(z)$, daar deze in die punten *discontinu* is. Voor $z=+1$ is blijkbaar $\varphi(z)=½$; voor andere punten z, waarvoor $|z|=1$, is $\varphi(z)$ niet gedefiniëerd, daar hiervoor de limiet in het rechterlid van (11) niet bestaat.

Uit het voorgaande is duidelijk, dat de cirkel Γ_0 van zoeven hier de cirkel $|z|=1$ is. Daar $\varphi(z)$ in de omgeving van $z=0$ *constant* is, hebben *alle* afgeleiden van $\varphi(z)$ de waarde 0 voor $z=0$. De ontwikkeling van $\varphi(z)$ volgens Maclaurin is dus:

$$0+\frac{z}{1!}.0+\frac{z^2}{2!}.0+\dots\dots \quad (12).$$

Deze ontwikkeling convergeert *in het gehele z-vlak* en haar som heeft overal de waarde 0. In dit geval strekt het convergentiegebied van de reeks van Maclaurin zich dus *verder* uit dan de cirkel Γ_0; op en buiten Γ_0 stelt echter de reeks niet langer de functie $\varphi(z)$ voor.

2e. In de *tweede* plaats beschouwen wij de ontwikkeling:

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\dots\dots \quad (13).$$

De functie $\frac{1}{1-z}$ heeft één singulier punt (een enkelvoudige pool), nl. het punt $z=1$; de cirkel Γ_0 is dus de cirkel $|z|=1$. Deze is in dit geval ook de convergentiecirkel van de reeks van Maclaurin.

eindpunten behoren niet tot de meetkundige plaats; als M het midden is van AB en de andere eindpunten C en D, bestaat de meetkundige plaats uit de lijnstukken CM en DM, waarbij vermeld *moet* [1]) worden, dat C, M en D er niet toe behoren." Een ervaren leermeester ziet hier blijkbaar geen kans een afgesproken beteekenis gedurende een paar minuten vast te houden. Zou het dan niet goed zijn beginnelingen zooveel mogelijk te steunen?

B. P. HAALMEIJER.

NOTATIE VOOR LIJNSTUKKEN

DOOR

J. H. SCHOGT.

Op bladz. 1—11 van dezen jaargang vindt men een artikel van den heer Wijdenes, waarin deze betoogt, dat eene afzonderlijke notatie voor lijnstukken, zooals ik die gebruik, niet noodig is, en ook niet wenschelijk. Naar aanleiding van dit artikel volgen hier eenige opmerkingen.

Meening van anderen. Behalve het genoemde artikel van den heer Wijdenes en de in deze aflevering voorkomende beschouwingen is mij slechts éene uitlating over deze aangelegenheid bekend. In de „Vorschläge zur Vereinheitlichung der mathematischen Bezeichnungen im Schulunterricht", herausgegeben vom Deutschen Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Teubner, 1913) leest men (blz. 6): „Es erscheint von Wert, dasz grundsätzlich Geraden und Strecken in der Bezeichnung unterschieden werden." De voorgestelde notatie is dezelfde als die ik gebruik: $\overline{AB}$. Of men in Duitschland op dit voorstel is ingegaan, is mij niet bekend.

De heer Wijdenes heeft nagegaan, „wat geleerde onderzoekers op het gebied van de grondslagen van de Euclidische meetkunde zeggen en doen. We kunnen zeker zijn, dat elk woord bij hen beteekenis heeft en dat het al of niet gebruiken van notaties zeer zeker een punt van ernstige overweging heeft uitgemaakt" (bldz. 3). Dat elk woord bij deze schrijvers beteekenis heeft, zal wel waar

[1]) Cursiveering van mij.

zijn, maar of zij de wenschelijkheid van het gebruik van notaties hebben overwogen, lijkt mij zeer twijfelachtig. Ik zie geen reden om aan te nemen dat deze schrijvers zich in mindere mate dan anderen door de traditie hebben laten leiden. De behoefte aan notaties doet zich trouwens eerst voor, als men een groot aantal malen over zekere figuren moet schrijven; het is dus geen wonder dat men ze niet vindt in betrekkelijk korte verhandelingen over de grondslagen, maar wèl in een uitvoerig leerboek als dat van Forder.

Consequentie in de toepassing. De opmerking van den heer Wijdenes, dat ik in mijne „Beginselen der Vlakke Meetkunde" gebrek aan consequentie heb getoond in de toepassing van notaties, doordat ik bij hoeken en cirkelbogen heb verzuimd wat ik bij lijnstukken heb toegepast, is ongetwijfeld juist. Ik heb mijn boek geschreven in de (achteraf onjuist gebleken) meening, dat ik een werk verrichtte, waarvan anderen dan ik zelf bij hun onderwijs konden profiteeren; daarom heb ik het apparaat der notaties niet dadelijk ten volle in werking willen stellen. Mij dunkt echter, dat eene onvolledige toepassing nooit een argument kan zijn ter afschaffing van eene overigens gewenschte handelwijze.

Bedoeling der notaties. De notaties zijn ingevoerd met dezelfde bedoeling als de uitbreiding der nomenclatuur: den leerlingen herhaaldelijk en onophoudelijk duidelijk voor oogen te stellen, wat bedoeld wordt en hen te dwingen, zich daarop te bezinnen. In dit opzicht zijn zij in zooverre ontbeerlijk, dat men de notaties steeds door omschrijvingen in woorden vervangen kan: in plaats van $\overline{AB}$ kan men schrijven „het lijnstuk AB", in plaats van AB: „de rechte lijn AB"; maar de notatie geeft eene aanmerkelijke bekorting. De notaties vormen dus eene aanvulling van de nomenclatuur, misschien niet noodzakelijk, maar met het oog op beknoptheid zeker nuttig. Met nadruk moet ik waarschuwen tegen de opvatting, dat „uit het verband" wel blijkt wat bedoeld wordt. In het eindexamenvraagstuk voor meetkunde no. 2 van 1924 is dit b. v. in het geheel niet uit te maken; jeugdigen leerlingen moet men m. i. zooveel mogelijk te hulp komen. Ik geloof trouwens, dat niemand een facultatief gebruik van notaties zal voorstaan, afhangende van het subjectief inzicht in „duidelijkheid uit het verband".

Oorsprong der notaties. Zooals bekend ondersteld mag worden, wordt in Fransche werken het quadraat der lengte van een lijnstuk $\overline{AB}$ veelal aangeduid door $\overline{AB}^2$, de lengte zelf echter door AB. De notatie met het streepje heeft allicht bevordering der duidelijkheid ten doel, evenals de schrijfwijze $(AB)^2$, die, naar ik dezer dagen vernam, op sommige scholen gebruikt wordt. De Fransche notatie is inconsequent (het quadraat der lengte *met* het streepje, de eerste macht *zonder*) maar zij heeft mij op het denkbeeld gebracht, het streepje ter aanduiding van het lijnstuk zelve te gebruiken. Tot de notatie $l(\overline{AB})$ voor de lengte van $\overline{AB}$ en $m(\overline{AB})$ voor wat ik de goniometrische maat van dat lijnstuk noem, ben ik gekomen door de overweging, dat men hier te doen heeft met het toekennen van getallen aan figuren volgens zekere regels; evenals de toevoegingswet, die uitgedrukt wordt door het teeken $f(x)$ aan het getal a toevoegt het getal $f(a)$, evenzoo wordt door de regels ter bepaling van lengte en maat van een lijnstuk aan $\overline{AB}$ toegevoegd het getal $l(\overline{AB})$, resp. $m(\overline{AB})$. Ditzelfde denkbeeld ligt ten grondslag aan de notaties O($\triangle$ ABC) voor de oppervlakte van $\triangle$ ABC en I(ABCD) voor den inhoud van het viervlak ABCD, welke notaties merkwaardigerwijze in veel geringere mate dan $l(\overline{AB})$ tot tegenstand blijken te prikkelen.

Uitgebreidheid van het notatiestelsel. Eene figuur of een aan eene figuur toegevoegd getal heeft recht op eene eigen notatie, zoodra die figuur of dat getal met voldoende frequentie optreedt; hetzelfde geldt voor de nomenclatuur. De volgende begrippen: lijnstuk, lijnstuk met inbegrip der eindpunten en lijnstuk met inbegrip van één der eindpunten komen in de schoolwiskunde zeker voor, maar mijns inziens niet vaak genoeg, om dezen figuren afzonderlijke namen en notaties te geven. Bij eene dieper gaande behandeling der meetkunde kan dit echter wel het geval zijn. Het lijkt mij echter hoogst ongewenscht, in de verschillende deelen der schoolwiskunde (meetkunde, trigonometrie, mechanica) verschillende notaties te gebruiken.

Eischen, waaraan eene notatie moet voldoen. Bij de behandeling der meetkunde op de scholen gaat men uit van het punt als element; de andere figuren worden als verzamelingen van punten beschouwd. Neemt men nu zooals steeds geschiedt, aan, dat een

punt door eene hoofdletter wordt aangeduid, dan behoort eene notatie door de erin voorkomende letters aan te geven, welke punten de bedoelde figuur bepalen. Aan dezen eisch voldoen de gebruikelijke notaties: AB, $\overline{AB}$, $\triangle$ ABC, $\angle$ ABC, enz., al zijn hier en daar aanvullende afspraken noodig (b. v. met betrekking tot uitspringende en inspringende hoeken).

Wil men ter bekorting b. v. $l(\overline{AB})$ door p aanduiden, dan is hiertegen natuurlijk geen bezwaar, maar deze aanduiding beteekent dan niet meer dan eene, voor een bepaald geval ingevoerde, afkorting; eene notatie kan men dit niet meer noemen. De zaak wordt natuurlijk anders, wanneer men het punt door een ander grondelement vervangt.

Het komt mij voor, dat deze opmerkingen voldoende zijn, om ieder in staat te stellen, na overweging van voor- en nadeelen, zijn standpunt te bepalen.

OPMERKINGEN NAAR AANLEIDING VAN DE EINDEXAMENOPGAVEN VOOR ALGEBRA 1936

DOOR

J. H. SCHOGT.

Het tweede algebravraagstuk van het eindexamen der hoogere burgerscholen B in 1936 luidt als volgt:

> Van een getallenrij is gegeven, dat de som van de eerste n termen — voor elke waarde van n — gelijk is aan $^{2}\log\,(2n^2 - 7n + 7)$.
>
> *a.* Bewijs, dat de som van de termen van deze rij voor elke waarde van n reëel (bestaanbaar) is.
>
> *b.* Bereken de eerste vier termen van deze rij.
>
> *c.* Druk de n^{de} term van deze rij uit in het ranggetal n, en ga na, voor welke waarden van $n > 4$ die term de waarde 1 heeft.
>
> *d.* Bepaal de limiet, waartoe de **termen** der rij naderen, als men n steeds laat toenemen.
>
> *e.* Welke verandering zouden de termen der rij ondergaan, wanneer men als grondtal van het logarithmenstelsel 32 aannam in plaats van 2?

Met de „som van de eerste n termen" wordt blijkbaar bedoeld de functie van n, die, wanneer men den n-den term der getallenrij door t_n aanduidt, aldus gedefinieerd wordt:

$$S_1 = t_1 \qquad S_{p+1} = S_p + t_{p+1}$$

Deze functie is gedefinieerd voor alle natuurlijke waarden van den index, en valt voor alle natuurlijke waarden grooter dan 1 samen met wat in letterlijken zin de som der eerste n termen der getallenrij is. Gegeven is dus

$$S_n = {}^2\log\,(2n^2 - 7n + 7)$$

„voor elke waarde van n". Bedoeld is, zooals vanzelf spreekt: „voor elke natuurlijke waarde van n". Het ware beter geweest, als de opsteller van het vraagstuk dit woord „natuurlijke" niet had weggelaten, want, hoe duidelijk het schijnbaar wezen moge, dat natuurlijke waarden bedoeld zijn, de weglating heeft tot moeilijkheden aanleiding gegeven.

Het antwoord op vraag b luidt:

$$t_1 = S_1 = 1 \qquad t_2 = S_2 - S_1 = -1 \qquad t_3 = S_3 - S_2 = 2$$
$$t_4 = S_4 - S_3 = {}^2\log 2{,}75$$

Het antwoord op vraag c luidt

$$t_n = S_n - S_{n-1} = {}^2\log \frac{2n^2 - 7n + 7}{2n^2 - 11n + 16}$$

voor alle natuurlijke waarden van n, die grooter zijn dan 1, en

$$t_1 = 1.$$

De bedoelde getallenrij is dus een variant, waarvan *niet alle* termen door eene zelfde eenvoudige formule in het ranggetal worden uitgedrukt, maar slechts de termen na den eersten. Ik vind een vraagstuk, dat tot zulk een variant voert, wel wat te moeilijk voor de examencandidaten. Ik vermoed, dat verreweg de meeste candidaten evenals mijne leerlingen voor het antwoord geschreven hebben

$$t_n = {}^2\log \frac{2n^2 - 7n + 7}{2n^2 - 11n + 16},$$

en dat is ook niet zoo erg; maar een candidaat die deze formule voor zich zelf wil verifieeren en daartoe de waarde 1 voor n substitueert, geraakt gemakkelijk op een dwaalspoor, en heeft allicht heel wat moeite om tot het juiste inzicht in de situatie te

komen en in te zien, dat het ongeoorloofd is, de formule te gebruiken voor de waarde 1 van n, hetgeen neerkomt op het gebruik van de betrekking $t_1 = S_1 - S_0$, waarin het beteekenislooze symbool S_0 optreedt. [1]) Ik acht dit een bezwaar van deze opgave als examenvraagstuk; als gewone oefening is zij daarentegen naar mijne meening bijzonder leerzaam.

Ik vermoed, dat de opsteller van het vraagstuk zich de beantwoording van vraag *d* als volgt heeft gedacht:

$$\lim t_n = \lim {}^2\log \frac{2n^2 - 7n + 7}{2n^2 - 11n + 16} = {}^2\log \lim \frac{2n^2 - 7n + 7}{2n^2 - 11n + 16} =$$

$$= {}^2\log \lim \frac{2 - \frac{7}{n} + \frac{7}{n^2}}{2 - \frac{11}{n} + \frac{16}{n^2}} = {}^2\log \frac{\lim\left(2 - \frac{7}{n} - \frac{7}{n^2}\right)}{\lim\left(2 - \frac{11}{n} + \frac{16}{n^2}\right)} =$$

$$= {}^2\log \frac{2}{2} = {}^2\log 1 = 0.$$

Wie de oplossing aldus geeft past de volgende stellingen over de limieten van varianten toe:

1°. de verwisselbaarheid van logarithmenemen en limietovergang;
2°. de stelling, dat varianten, die term voor term overeenkomen, geen verschillende limieten hebben, m. a. w. dat een variant ten hoogste éène limiet heeft;
3°. de stelling, dat de limiet van een quotient het quotient der limieten van deeltal en deeler is, mits de limiet van den deeler niet nul is;
4°. de verwisselbaarheid van limietovergang met optellen en aftrekken;
5°. de stelling, dat de limiet eener constante die constante zelf is;
6°. de stelling dat uit $\lim a_n = A$ volgt $\lim ca_n = cA$;
7°. de stelling dat $\lim \frac{1}{n}$ en $\lim \frac{1}{n^2}$ nul zijn.

Het lijkt mij volkomen ondenkbaar, dat er scholen zijn, waar dit alles behandeld wordt. Wat mijzelven betreft, ik behandel de stellingen 2, 4, 5 en 6 altijd *met* de bewijzen, stelling 3 vermeld ik

---

[1]) Dat dit moeilijkheden geeft, zelfs waar men die niet zou verwachten, blijkt, als men het supplement 1936 opslaat van de Eindexamenopgaven, uitgegeven door Ir. D. J. Kruijtbosch.

steeds, zonder haar te bewijzen, stelling 7 behandel ik niet uitdrukkelijk, maar zij komt allicht wel eens bij de voorbeelden te pas. Wat echter stelling 1 betreft, ik moet bekennen, dat ik daaraan nooit gedacht heb. Men vindt haar in geen enkel leerboek over lagere algebra, zelfs niet in Wijdenes' Lagere Algebra II, wel in diens Middel-Algebra; door traditie tot de schoolalgebra behooren doet zij zeker niet. Ik vermoed, dat verscheidene collega's over limieten van varianten minder behandelen dan ik. — Tot mijn spijt moet ik hier eene nieuwe uiting constateeren van het streven der samenstellers van de eindexamenopgaven, om de candidaten te dwingen tot het geven van oplossingen met behulp van middelen, die zij niet hebben leeren beheerschen; [1]) het goede beginsel, dat de candidaten hunne oplossingen stap voor stap moeten fundeeren met stellingen, waarvan hun het bewijs of althans de exacte formuleering is medegedeeld, wordt blijkbaar meer en meer verlaten. [2])

Het vraagstuk, dat dit jaar is opgegeven, heeft nog eene variantenlimiet tot onderwerp, maar ik acht den tijd niet ver meer, dat de vraagstukken over limietwaarden van functies, die thans een bloeitijdperk beleven op de gymnasiale eindexamens, hunne intrede zullen doen op de eindexamens der hoogere burgerscholen. Ik zou den autoriteiten zeer dringend willen verzoeken, eens terdege na te gaan, welke theorie hieraan ten grondslag ligt, voordat zij het eerste vraagstuk van dit type lanceeren. En, mochten zij na grondig onderzoek hiertoe besluiten, dan geloof ik dat zij vele leeraren zouden verplichten door tijdig te waarschuwen.

Het eerste vraagstuk voor algebra van het eindexamen 1936 geeft slechts tot ééne opmerking aanleiding. Er is sprake van eene rekenkundige reeks, en hierbij had moeten worden vermeld, dat het verschil niet nul is. Nu de mogelijkheid van een verschil nul niet is uitgesloten, kan men het aantal termen der reeks feitelijk niet bepalen. Maar practisch zal dit wel niet tot moeilijkheden aanleiding hebben gegeven.

---

[1]) De volgende anecdote moge hier een plaatsje vinden: toen ik onlangs eene zekere behandelingswijze „erger dan den Franschen slag" noemde, riep eene mijner leerlingen uit: „de schoolslag!"

[2]) Zie Euclides XII, bldz. 259; het daar genoemde voorbeeld is echter m. i. veel krasser dan dit.

KORRELS.

IX. *Homoloog; homothetisch; affien.*

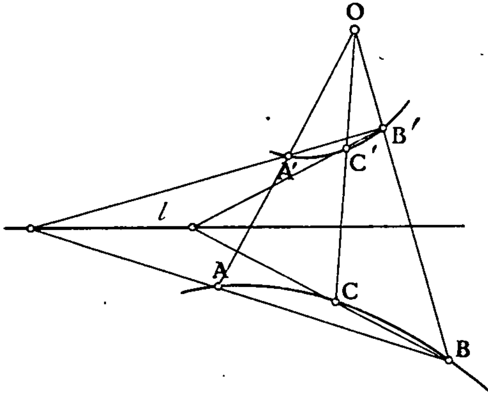


Fig. 1.

Fig. 1 vertoont een centrum O en een rechte *l*; op een straal door O ligt het punt A van een figuur F; zij A′ het overeenkomstige punt. B is een tweede punt van F; op OB ligt het overeenkomstige punt B′ zo, dat BA en B′A′ de lijn *l* in een zelfde punt snijden; zie ook C en C′. De figuren F en F′ heten *homoloog* of *centraal collineair*; immers de stralen door gelijknamige punten A en A′, B en B′, enz. snijden elkaar in een vast punt O en de overeenkomstige lijnen AB en A′B′, BC en B′C′, enz. snijden elkaar op een vaste lijn *l*.

Als *l*, de as van homologie, de rechte op oneindig is, is

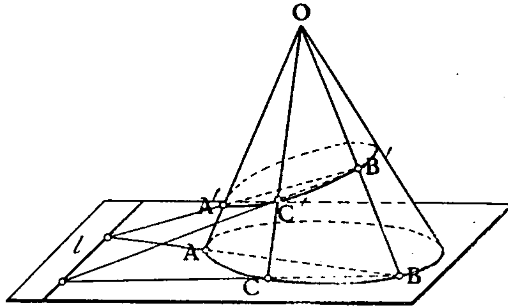


Fig. 2.

AB // A′B′, enz.; in dat geval zijn de figuren homothetisch; homothetie is dus een bijzonder geval van homologie; O is dan het centrum van vermenigvuldiging.

PROSPECTUS

VERSCHENEN:

VLAKKE MEETKUNDE

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

EN

DR. D. DE LANGE

IN LEVEN LERAAR BIJ HET M.O. IN OOST-INDIË

TWEEDE DEEL

NEGENDE, OMGEWERKTE DRUK



Deel I 10e druk, ... gec. f 2.25

Deel II 9e druk, 158 bladz. 137 fig. gec. f 2.25

P. NOORDHOFF N.V. – 1936 – GRONINGEN-BATAVIA

BIJ DE NEGENDE DRUK.

De nieuwe druk wijkt vrij veel af van de vorige acht drukken, die onderling maar weinig verschil vertoonden. Het voornaamste zij hier in het kort vermeld.

1. Het hoofdstuk over oppervlakte van vierhoeken en van de driehoek is overgebracht naar het eerste deel. Deze stof, waarvan het grootste deel al van de lagere school bekend is, is veel eenvoudiger dan die over evenredigheden van lijnstukken en dan het hoofdstuk over berekening van allerlei lijnstukken (toepassing van algebra op figuren). Bovendien kan de voorafgaande behandeling van de oppervlakten steun geven bij verschillende bewijzen. Een eerste eis is een behoorlijke opklimming in moeilijkheid en men voldoet aan die eis, als men de volgorde neemt, zoals die op de overzichten met één oogopslag is te zien.

2. Er zijn een paar bladzijden ingelast over sinus, cosinus en tangens van een scherpe hoek; men is bij de berekeningen dus niet langer gebonden aan hoeken, die met passer en liniaal zijn te construeren. Bij de werkstukken zetten we hoeken af met de gradenboog; bij de berekeningen gebruiken we een tafeltje met de verhoudingen, die in een rechthoekige driehoek voorkomen bij gegeven hoek. Beperking is hier m.i. een eerste eis; slechts een enkele maal (blz. 83, 101, 114) worden de begrippen even opgehaald en toegepast.

3. De vermenigvuldiging van een cirkel is tot het nodigste beperkt en ingelast, waar deze behoort (blz. 21).

4. Stelling 68 is zeer eenvoudig en kan enige keren met vrucht gebruikt worden om lelijke bewijzen te vervangen door mooie en korte (st. 72; nr. 15 blz. 10; st. 81; st. 82; st. 89; st. 91).

5. Ingevoerd is het woord *zijlijn*; AB is zijde van een driehoek; de lijn, waarvan AB een lijnstuk is, noemen we de zijlijn AB van △ ABC. „AB of een van de verlengden van AB", komt dus niet meer voor.

6. Veel vraagstukken, vooral moeilijke en bewerkelijke, zijn er opgeruimd en heel wat theorie, waaraan de school toch niet toekwam; bovendien is er naar gestreefd, de eenvoudigste uiteenzetting te geven.

7. De nummers van enkele vraagstukken zijn dik gedrukt; de bedoeling daarvan is, dat deze evenals de stellingen en de theorie gekend moeten worden; de rest van de vraagstukken is oefenstof.

De gehele herziening werd geleid door de volgende overwegingen:
matiging van de eisen omtrent de hoeveelheid stof, zodat er doorkomen aan is en men ook nog wat van de herhalingen kan doorwerken;
didaktische behandeling, ook in de volgorde;
weglating van wat men niet goed kan behandelen, met name de onmeetbare verhoudingen in de tweede klas (het rapport Dr. Beth c.s. noemt het irrationale getal voor het eerst voor de vierde klas);
het leggen van verband met de driehoeksmeting.

Beleefd verzoek ik collega's, die dit boek met hun klas gebruiken, mij hun op- en aanmerkingen niet te onthouden.

Amsterdam Zuid P. WIJDENES.
Jac. Obrechtstraat 88
Augustus 1936.

VLAKKE MEETKUNDE van WIJDENES en DE LANGE

FORMULES
UIT DE VLAKKE MEETKUNDE.

$p = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$ (projectie van *a* op *b*); $x^2c = a^2c_1 + b^2c_2 - cc_1c_2$

$z_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$; $d_1 = \sqrt{ab - c_1c_2} = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$

$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; $d_2 = \sqrt{c_1c_2 - ab} = \frac{2}{|a-b|}\sqrt{ab(s-a)(s-b)}$

$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$

$R = \frac{abc}{4O}$; $r = \frac{O}{s}$; $r_a = \frac{O}{s-a}$

$pq = ac + bd$ (Ptolemaeus) en $\frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$

$z_{2n} - \sqrt{2R^2 = R\sqrt{4R^2 - z_n^2}} = \sqrt{R(R + \frac{1}{2}z_n)} - \sqrt{R(R - \frac{1}{2}z_n)}$

$Z_n = \frac{2z_nR}{\sqrt{4R^2 - z_n^2}}$

$z_3 = R\sqrt{3}$ $z_4 = R\sqrt{2}$

$z_6 = R$ $z_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$z_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$\begin{cases} g = \frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5}) \\ k = \frac{1}{2}a(3 - \sqrt{5}) \end{cases}$ Gulden snede

$z_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$d_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

$z_{10} = \frac{1}{2}R(-1 + \sqrt{5})$

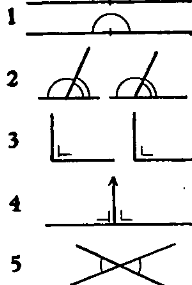
Omtrek $= 2\pi r$; opp. $= \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$.

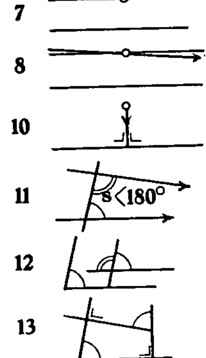
$\frac{180°}{\pi} = 1$ radiaal $= 57° 17' 45''$

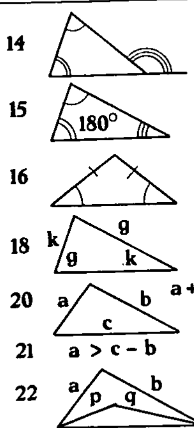
$\pi = 3{,}141593$ $\pi^2 = 9{,}869604$ $\sqrt{\pi} = 1{,}772454$

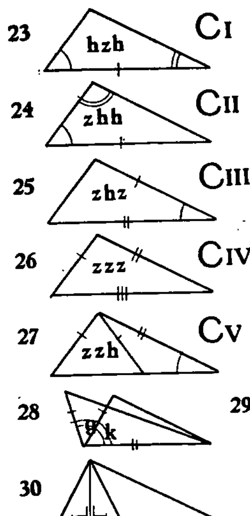
$\frac{1}{\pi} = 0{,}318310$ $\frac{1}{\pi^2} = 0{,}101321$ $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}564190$

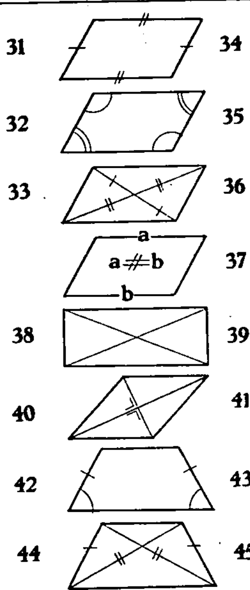
INHOUD VAN HET EERSTE DEEL

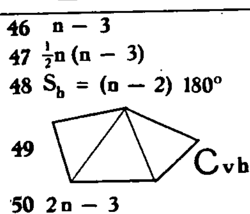


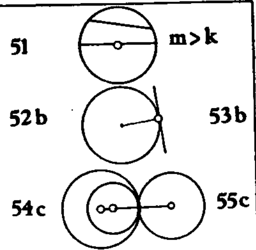


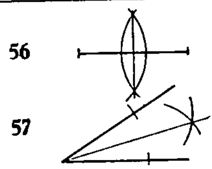


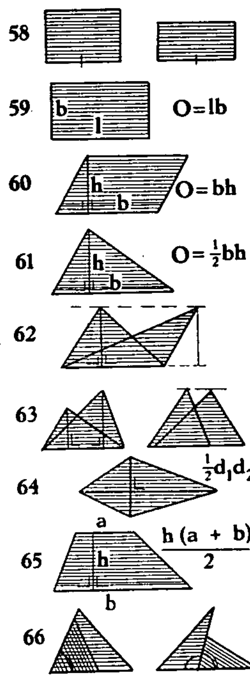


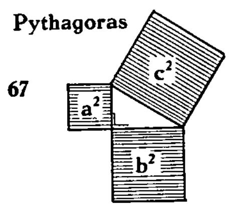












N.B. Als het nummer rechts van een figuur staat, duidt dit op een omgekeerde stelling.

INHOUD VAN HET TWEEDE DEEL

Ph.

WERKSTUKKEN.

I. Een hoek construeren gelijk aan een gegeven hoek.

II. Door P de lijn evenwijdig aan een lijn l.

III. Een hoek middendoor delen.

IV. In een punt van een lijn de loodlijn oprichten.

V. Uit een punt de loodlijn op een lijn neerlaten.

VI. Een lijnstuk loodrecht middendoor delen.

VII. In een punt van een cirkel de raaklijn te trekken.

VIII. Uit een punt buiten een cirkel de raaklijnen te trekken.

IX. De gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels te trekken.

X—XIV. Constructies van driehoeken; opv. *hzh*; *zhh*; *zhz*; *zzz*; *zzh*.

XV. Een driehoek ABC te veranderen in een andere met gelijke oppervlakte, waarbij $\angle$ A dezelfde blijft en AB een gegeven lengte krijgt.

XVI. Door een punt P op AB een lijn construeren, die de opp. van driehoek ABC in twee gelijke delen verdeelt.

XVII. Een lijnstuk in n gelijke delen te verdelen.

XVIII. Een lijnstuk te verdelen in stukken met gegeven verhouding.

XIX. De vierde evenredige tot drie lijnstukken te construeren.

XX. De middelevenredige tussen twee lijnstukken te construeren.

XXI. Constructie van $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $y = \sqrt{p^2 - q^2}$.

XXII. Van een driehoek ABC door een lijn evenwijdig met AB $\frac{1}{3}$e van de oppervlakte af te snijden.

XXIII. De oppervlakte van een driehoek door lijnen evenwijdig aan een gegeven lijn in drie gelijke delen te verdelen.

XXIV. Op een koorde een segment te beschrijven, dat een gegeven hoek bevat.

XXV. Constructie van $x = p\sqrt{\frac{q}{r}}$.

XXVI. $x + y = s$ en $xy = b^2$.

XXVII. $x - y = v$ en $xy = b^2$.

XXVIII. Een lijnstuk in de uiterste en middelste reden te verdelen.

XXIX. Een regelmatige ingeschreven tienhoek te construeren.

Als O een punt op oneindig is, zijn de stralen AA′, BB′, CC′, enz. evenwijdig; de homologie gaat dan over in affiniteit; *l* wordt de as van affiniteit.

Zie ook fig. 2; de vlakken ABC en A′B′C′ snijden elkaar volgens *l;* de doorsneden zijn homologe figuren. Als het vlak ABC evenwijdig is met het vlak A′B′C′, is *l* de rechte op oneindig; de doorsneden zijn dan homothetisch (dat is: elkaars productfiguur met O als centrum). O op oneindig betekent, dat men te doen heeft met een cylinder; de doorsneden met vlakken, die elkaar volgens *l* snijden, zijn dan affine figuren: immers overeenkomstige rechten snijden elkaar op *l* en de verbindingslijnen van overeenkomstige punten zijn evenwijdig.

W.

X. *Een vraag.*

In Petersen „Methoden en Theorieën" betekent „rotatie" vermenigvuldiging *en* draaiing met hetzelfde punt als centrum; het boek werd niet herdrukt. Wegens het belang van het hoofdstuk is dit in Versluys—Wijdenes „Methoden voor het oplossen van meetkundige vraagstukken" onveranderd overgenomen. Nu vind ik het echter minder juist, de beide bewerkingen onder „rotatie" samen te vatten. Vermenigvuldiging is een transformatie; rotatie is de enkelvoudige transformatie „draaiing"; dat is beter. Maar welke naam dan te geven aan beide samen? Beide transformaties op een figuur F toegepast, geven een figuur F′, die rechtstreeks gelijkvormig is met F; het is dus wel gewenst, voor de beide transformaties samen, die F in F′ omzetten, een naam in te voeren. Ik heb er het volgende op bedacht, maar geef het voor beter.

In het complexe vlak is $(a + bi)$ F $= m$ $(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ F (m is de modulus van $a + bi$ en α het argument), zodat $(a + bi)$ F meetkundig bestaat in vermenigvuldigen met m en draaien van de productfiguur over een hoek α; beide met hetzelfde punt als centrum (of omgekeerd: eerst draaien, dan vermenigvuldigen). Vermenigvuldiging en draaiing met een zelfde centrum zou ik willen noemen *complex vermenigvuldigen.* Voor hen, die weten, wat dit in het complexe vlak is, is dat volkomen duidelijk. Voor hen, die dat niet weten, ook; het woord *complex* moet dan worden uitgelegd als in: een complex van bewegingen, twee (of meer) dus.

Twee rechtstreeks congruente figuren kunnen door rotatie in elkaar worden omgezet (het centrum O heet het dekpunt van de congruentie); twee rechtstreeks gelijkvormige, evenwijdig geplaatste figuren (homothetische figuren) hebben een homothetisch centrum O; twee rechtstreeks gelijkvormige figuren hebben een centrum O van complexe vermenigvuldiging (het dekpunt van de gelijkvormigheid). De zaak is zo wel in orde; het woord „complexe vermenigvuldiging" geef ik echter gaarne voor beter; wie weet wat beters? Ook voor het woord „vermenigvuldigen"; maar dat is al zo ingeburgerd, dat het moeilijk te vervangen zal zijn.

W.

XI. In allerlei leerboeken vindt men nog steeds de schrijfwijze

$$a : b : c = d : e : f \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

in de beteekenis van

$$a : d = b : e = c : f \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Houdt men zich aan de beteekenis van $a : b : c$ nl. $\frac{a}{b} : c$ en aan die van het gelijkteeken (men moet toch consequent zijn!), dan dekken (1) en (2) elkaar geenszins. Want uit (2) volgt

$$a : b = d : e,$$

waardoor uit (1) zou volgen

$$c = f,$$

hetgeen (2) volstrekt niet zegt!

Alzoo: òf men schrijve nooit (1) in plaats van (2), òf men bezige, om (2) aan te duiden, de gewijzigde schrijfwijze van (1):

$$a : b : c :: d : e : f.$$

V.

XII. Zie de eerste regel van nr. VIII blz. 21 in deze jaargang.

Sterker voorbeeld.

„Op fig. 1 is het vlak A gegeven en de projectie P_1 van een punt P van dat vlak; gevraagd P_2".

Fig. 1.

In volgorde BC, CD, CF, boog BE, ED, P_1G, GH, boog HK, P_1L, KP_2; zie fig. 2.

Een normaal mens zal op fig. 1 trekken: P_1M, MN, P_1L, NP_2, dus van een lijn in vlak A door P de beide projecties tekenen en als er meer punten zijn, dit herhalen als fig. 3 ons toont; zie R_1, B, C, R_2. Ik geef het de leraren, die de onzinnige manier van fig. 2 volgen, te doen met hun hoogste klas fig. 3 te laten uitvoeren net als op fig. 2.

Fig. 2.

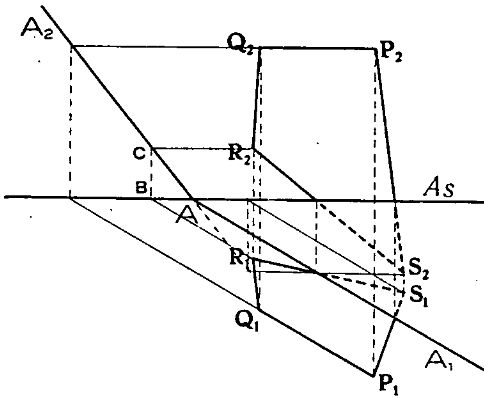


Fig. 3.

En laten ze het zelf eens doen om uit de verticale projectie P_2, Q_2, R_2, S_2 van fig. 3 de horizontale af te leiden: op de wijze van fig. 2.

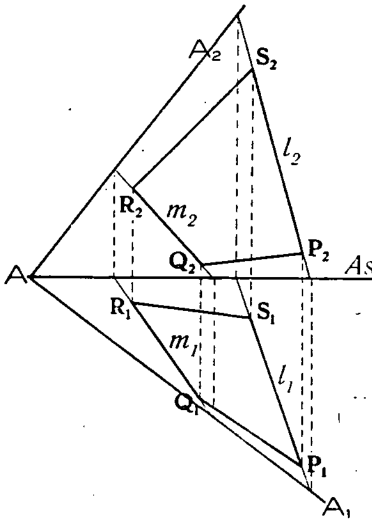


Fig. 4.

Zijn er meer punten over te brengen, dan neme men nog liever lijnen door twee punten; zie *l* en *m* op fig. 4. De lezer vergelijke deze simpele manier met die van fig. 2!

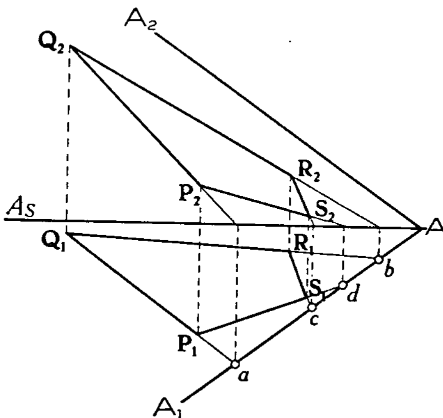


Fig. 5.

Een recht vierzijdig prisma heeft tot grondvlak PQRS; het snijvlak A is gegeven; gevraagd de doorsnede. Zie fig. 5; in de Stereometrie zoeken we de snijlijn van het grondvlak en het snijvlak; dat is AA_1; zie *a, b, c* en *d*; de lezer ziet direct de constructie. Ook kan men nog PR en QS gebruiken.

De doorsnede van het snijvlak en het deelvlak van

de tweede ruimtehoek is s_{12} (fig. 6); op deze lijn snijden de 1e en

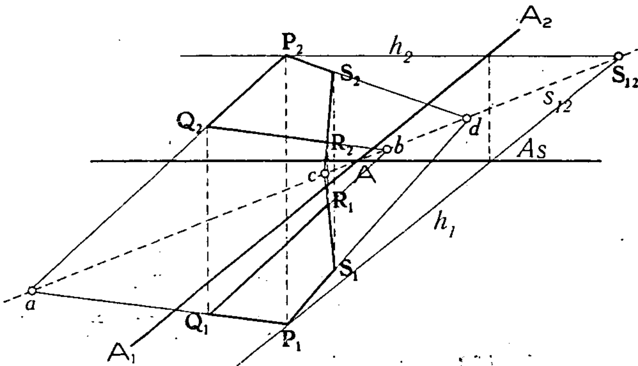


Fig. 6.

2e projectie elkaar van elke zijde van de vierhoek. Met h bepaalt men P_2 uit P_1; h_1 en h_2 leveren S_{12}; AS_{12} is de snijlijn.

P_1Q_1 snijdt s_{12} in a; trek aP_2, dan vindt men Q_2; enz.

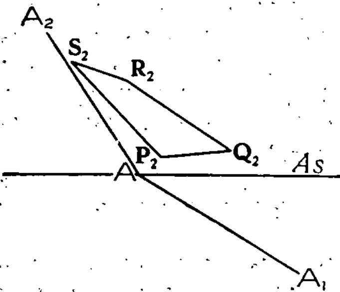


Fig. 7.

De manier van fig. 2 toepassen op fig. 6 en op fig. 7; dringend verzoek ik collega's voorstanders van fig. 2, *dit werkelijk eens te doen;* daarna op de manieren van fig. 3, 4, 5 en 6.

Wat zal een gebruiker van de „methode" van fig. 2 zeggen, als hij door een kennis wordt uitgenodigd per auto mee te rijden van Amsterdam naar Rotterdam en deze hem de volgende weg voorslaat: Amsterdam, de bochtige Vecht, het drukke Utrecht met de spoorbanen, die altijd gesloten zijn, de weg met twee tollen naar Vianen, dan naar Gorinchem, het pontveer, naar de Moerdijk, de pont naar Dordrecht, de pont, Rotterdam.

Waarom een goede, korte weg, als een lange, slechte omweg met hindernissen er je ook brengt? Ja, waarom ook?

In ons geval zijn er zelfs vier wegen!

Belangstellende lezers worden gewezen op „Euclides" Jg. VII blz. 113 en Jg. VIII blz. 113.

W.

BOEKBESPREKING.

Dr. J. J. van Laar. Die Thermodynamik einheitlicher Stoffe und binaerer Gemische, mit Anwendungen auf verschiedene physikalisch-chemische Probleme.
P. Noordhoff N.V. 1936, Groningen—Batavia, *f* 12.—, geb. *f* 13.50, p. 377.

In dit boek geeft een grootmeester der Nederlandsche thermodynamica een samenvatting van zijn levenswerk.

„Het spreekt van zelf, dat aan een strenge behandeling der pro- „blemen met behulp van de thermodynamische potentiaal wordt vast- „gehouden zonder van surrogaten als osmotische druk, „Aktivität" of „zelfs Affiniteit te gebruiken. Wij zijn gelukkig ver verwijderd van „de oertijd (1890) der physische chemie, toen deze begrippen ter „vereenvoudiging der strenge theorie ingevoerd werden, daar de „meeste chemici van deze tijden (en ook nog veel later!) te weinig „mathematische kennis bezaten om in de thermodynamica iets verder „te gaan dan de elementaire kringprocessen."

Op de basis van dit programma heeft van Laar vele jaren gewerkt en wij mogen zeggen gestreden — dit werk is in het boek, dat wij thans bespreken, uitgekristalliseerd.

Het werk is in twee boeken ingedeeld: I. de enkelvoudige stoffen, II. de binaire systemen. De drie hoofdstukken van het eerste boek behandelen: 1e. de toestandsvergelijking, 2e. de thermodynamische grootheden voor enkelvoudige stoffen, 3e. de heterogene evenwichten tusschen verschillende phasen van enkelvoudige stoffen. Het tweede boek omvat 7 hoofdstukken achtereenvolgens beschrijvend: 1e. thermodynamische potentialen, 2e. evenwicht bij gemengde phasen, 3e. evenwicht in de homogene gasphase, 4e. evenwicht tusschen twee binaire vloeistofmengsels en in een homogene phase, 5e. evenwicht tusschen een binaire vloeistof en een binaire dampphase, 6e. het evenwicht vloeistofvast bij twee componenten en 7e. de verschillende vormen van het ontmengingsgebied, als de twee componenten een binaire gedeeltelijk gedissocieerde verbinding vormen.

Het boek geeft een korte en bondige, maar toch een zeer duidelijke behandeling van de problemen; de theoretische beschouwingen worden aan de hand van het feitenmateriaal gevoerd en getoetst. Als leerboek der thermodynamica is het niet bedoeld; het is echter voor hen, die de grondslagen uit de vele goede bestaande leerboeken kennen een goede gids in het gebied, dat door den auteur met zooveel diepte doorzocht en met zooveel vrucht doorwerkt is. Het groote belang

der thermodynamische beschouwingswijze ligt er in, dat zij met minimum van hypothesen orde leert brengen in een groot gebied. Van Laar's boek is bij uitstek geschikt om de verkenning van dit gebied te bevorderen. De uitgever heeft voor een zeer fraaie uitvoering zorg gedragen.

Utrecht. L. S. O.

Nederlandsch Tijdschrift voor Natuurkunde. Redactie: Dr. M. Minnaert, Dr. E. Oosterhuis, Dr. B. van der Pot, Dr. C. Zwikker en tal van medewerkers. Verschijnt 10 maal per jaar; omvang ± 320 blz. Abonnementsprijs voor Nederland en Koloniën *f* 7.50, voor 't buitenland *f* 8.50. Martinus Nijhoff — 's Gravenhage.

Als specimen van het Nederlandsch Tijdschrift voor Natuurkunde werd aan de Redactie van Euclides toegezonden nummer 1 van den derden jaargang met een inliggend blad, waarop de inhoud van deel III afl. 1—4 vermeld staat.

De bedoeling van dit tijdschrift is een andere dan die van „Physica". Neemt het laatste alleen origineele publicaties op, het eerste is bedoeld om alle belanghebbenden of belangstellenden op de hoogte te houden van de ontwikkeling der moderne natuurkunde. Uit den inhoud van het ontvangen nummer (De beteekenis van James Chladwick voor de ontwikkeling der Kernphysica door G. J. Sizoo; de electrische lichtboog I door H. Brinkman; Dissertaties; Verslag der Alg. Verg. der Ned. Nat. Vereeniging 1935, behandelende Metingen aan trillingdempende stoffen door C. Zwikker en Magnetisme bij lage temperaturen door H. A. Kramers; De inhoud van Physica; Boekbespreking) kan men opmaken, dat dit hoogst lofwaardige doel op ruime en uitstekende wijze nagestreefd wordt.

D. P. A. V.

Leerboek der Vlakke Meetkunde voor U.L.O.-, Kweek-, Handelsdagscholen e.d. door H. Püper. Deel Ia en Deel Ib bevat de stof voor het Mulo-Diploma A. Tweede druk. Prijs ing. *f* 1.— en *f* 1.25. W. Versluys' Uitgevers-Maatschappij (N.V.). Amsterdam—Batavia—Paramaribo 1936.

Merkwaardig: men vraagt een recensie. Doch heeft de schrijver nu maar eenvoudig genegeerd, hetgeen de heer Schogt in den 9en jaargang 1932/33 nr. 2, blz. 77, van Euclides over Meetkunde voor M U.L.O. heeft geschreven? Ik behoef thans aan dit oordeel van den heer Schogt niets meer toe te voegen: Men ziet hier nog steeds dezelfde feilen als achterlijkheden (b.v. „lijn" in plaats van „lijnstuk"), dwaze en tot slordigheid leidende afkortingen (b.v. bi.h.a d.k.d.s., parm.) en onjuistheden.

Een *tweede* druk: Wat moet men van de gebruikers van dergelijke gebrekkige boekjes denken?!

D. P. A. V.

HOOFDSTUK IV.

OVER BOL EN CYLINDER.

Boek I.

1. INLEIDING.

Het eerste van de twee boeken, waarin het werk *Over Bol en Cylinder* verdeeld is, begint met een schrijven aan Dositheos, waarin Archimedes eraan herinnert, dat hij vroeger reeds het bewijs van de stelling heeft gezonden, dat ieder segment van een orthotome vier-derde maal zoo groot is als de driehoek met dezelfde basis en dezelfde hoogte [1]). Thans zal hij nieuwe stellingen aantoonen:

a) De oppervlakte van een bol is viermaal zoo groot als die van zijn grootsten cirkel [2]).

b) De oppervlakte van een bolsegment is gelijk aan die van een cirkel, waarvan de straal gelijk is aan de rechte, uit den top van het segment getrokken naar een punt van den omtrek van den cirkel, die de basis van het segment is [3]).

c) De cylinder [4]), waarvan de basis gelijk is aan een grootsten cirkel van een bol en de hoogte gelijk aan den diameter, is zelf anderhalfmaal zoo groot als de bol [5]) en zijn oppervlakte is anderhalfmaal zoo groot als de oppervlakte van den bol [6]).

Op deze voorloopige en gedeeltelijke opsomming van den inhoud van het werk volgt een uitlating, waarvan de juiste strekking aan twijfel onderhevig is en die we daarom in het oorspronkelijke met een proeve van vertaling mededeelen:

---

1) **Q.P.** 17 en 24. Zie Hoofdstuk X.

2) **S.C.** I, 33. De Grieken zeggen „grootste cirkel" (μέγιστος κύκλος) wat logischer is dan onze term „groote cirkel".

3) **S.C.** I, 42, 43. In overeenstemming met den Griekschen tekst spreken we van de basis van een bolsegment, kegel, cylinder, prisma enz., waar men tegenwoordig grondcirkel of grondvlak zegt.

4) Met cylinder wordt in **S.C.** een rechte cirkelcylinder bedoeld, met kegel een rechte cirkelkegel.

5) In het Grieksch bestaat geen woord voor inhoud. Deze grootheid wordt aangeduid met den naam van het lichaam zelf. Hetzelfde gebeurt in planimetrische beschouwingen gewoonlijk met de oppervlakte van een figuur.

6) **S.C.** I, 34. Corollarium.

ταῦτα δὲ τὰ συμπτώματα τῇ φύσει προυπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἠγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος, ὅτι τούτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία· διόπερ οὐκ ἂν ὀκνήσαιμι ἀντιπαραβαλεῖν αὐτὰ πρός τε τὰ τοῖς ἄλλοις γεωμέτραις τεθεωρημένα καὶ πρὸς τὰ δόξαντα πολὺ ὑπερέχειν τῶν ὑπὸ Εὐδόξου περὶ τὰ στερεὰ θεωρηθέντων, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον ἐστὶ μέρος πρίσματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτήν τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὅτι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον· καὶ γὰρ τούτων προυπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα, πολλῶν πρὸ Εὐδόξου γεγενημένων ἀξίων λόγου γεωμετρῶν συνέβαινεν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι μηδ' ὑφ' ἑνὸς κατανοηθῆναι.

Deze eigenschappen bestonden ook vroeger al van nature in de genoemde figuren, maar ze waren onbekend aan hen, die voor ons de geometrie beoefenden, doordat geen van hen heeft ingezien, dat er tusschen deze figuren symmetrie bestaat [7]. *Daarom zou ik ook niet willen aarzelen, om deze eigenschappen te vergelijken met wat door andere geometers is ingezien en met de naar mijn meening meest uitmuntende van de theoremata van Eudoxos omtrent de ruimtelijke figuren, namelijk, dat elke pyramide het derde deel is van het prisma, dat dezelfde basis heeft als de pyramide en een even groote hoogte en dat iedere kegel het derde deel is van den cylinder, die dezelfde basis heeft als de kegel en een even groote hoogte* [8]. *Want hoewel ook deze eigenschappen van nature vroeger reeds in de figuren bestonden en er voor Eudoxos vele belangrijke geometers geweest zijn, zijn ze aan allen onbekend gebleven en door niemand ingezien* [9].

---

[7]) We gebruiken het woord symmetrie hier in de beteekenis van onderlinge meetbaarheid, die daaraan zoowel etymologisch als historisch toekomt.

[8]) Euclides XII, 7, Porisma. XII, 10.

[9]) Elders (inleiding tot de *Methode*, *Opera* II, 430) zegt Archimedes, dat een niet gering deel van de verdienste van deze stellingen toekomt aan Demokritos, die ze het eerst, zij het ook zonder bewijs (dat wil zeggen, zonder een volkomen exact bewijs), heeft uitgesproken. Er bestaat tusschen deze twee mededeelingen een tegen-

Wanneer de voorgestelde vertaling juist is, dan schijnt Archimedes er hier zijn verbazing over uit te spreken, dat meetkundige figuren van nature, d.w.z. zonder dat het gezegd wordt in de definitie, die wij ervan geven, merkwaardige eigenschappen kunnen bezitten, die ondanks hun eenvoud wellicht heel lang onopgemerkt blijven. Het is de typisch-mathematische verbazing over den ónvermoeden intrinsieken rijkdom van de eigen bepaling, die hier tot uiting komt.

Aan het slot van zijn voorrede biedt de schrijver zijn werk aan alle deskundigen ter beoordeeling aan; hij betreurt het, dat het niet meer tijdens Konoon's leven het licht heeft kunnen zien, omdat deze zoo bij uitstek in staat zou zijn geweest, het te begrijpen en te beoordeelen. Hierna volgen nu eerst de *axiomata* en de *lambanomena*, die den grondslag van het betoog zullen vormen.

2. AXIOMATA.

De eerste groep van de grondslagen draagt den naam *Axiomata* in zooverre terecht, dat daarin het bestaan van zekere soorten krommen en oppervlakken wordt gepostuleerd. Anderzijds bevat ze echter ook twee zuiver nominale definities.

I. *Er bestaan in een plat vlak zekere begrensde gebogen lijnen* [10]*), die òf geheel aan denzelfden kant van de verbindingsrechte van hare uiteinden liggen òf niets aan den anderen kant daarvan hebben.*

Eutokios legt hierbij uit [11]), dat onder de categorie van de gebogen lijnen (καμπύλαι γραμμαὶ) ook lijnen vallen, die geheel of ten deele uit rechte lijnstukken bestaan. Daardoor kunnen o.a. de door Archimedes beschouwde krommen over een deel van hun beloop samenvallen met de rechte, die door de eindpunten bepaald is.

II. *Ik noem een dergelijke lijn „hol naar denzelfden kant"* (ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλη)*, wanneer ze de eigenschap heeft, dat, wanneer*

---

strijdigheid, die niet is op te heffen, door te onderstellen, dat Archimedes bij het schrijven van **S.C.** nog niet geweten zou hebben, wat hij in **Meth.** vertelt; om verschillende andere redenen wordt nl. aangenomen, dat van de twee werken de *Methode* het oudste is.

[10]) Hiermee wordt bedoeld, dat het beschouwde deel van de kromme twee eindpunten heeft.

[11]) *Opera* III, 4; l. 8 seq.

er twee punten willekeurig op worden aangenomen, de rechten[12]) *tusschen zulke punten òf alle aan denzelfden kant van de lijn liggen òf deels aan denzelfden kant, deels op haar, maar geen enkele aan den anderen kant.*

De lijnen, die door Axioma II worden bepaald, behooren dus in de door Axioma I omschreven categorie; dit komt in de meeste vertalingen niet voldoende uit[13]). In moderne terminologie wordt door Axioma II vastgelegd, dat een lijn, die hol naar denzelfden kant is, met het verbindingslijnstuk van haar eindpunten een convex gebied omsluit.

Van de in fig. 51 geteekende lijnen met de eindpunten *A* en *B* behooren *a, b* en *c* tot de omschreven soort, *d* en *e* niet.

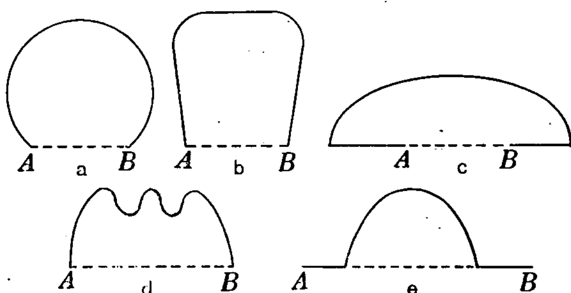


Fig. 51.

III. *Evenzoo bestaan er zekere begrensde oppervlakken*[14]), *die zelf niet in een plat vlak liggen, maar die hun rand in een plat vlak hebben en die òf geheel aan denzelfden kant liggen van het vlak, dat den rand bevat, òf niets aan den anderen kant daarvan hebben.*

Het is ook hier weer de bedoeling, dat de oppervlakken, waarvan sprake is, ook geheel of ten deele uit platte vlakstukken kunnen bestaan.

IV. *Ik noem dergelijke oppervlakken „hol naar denzelfden*

---

[12]) De Grieken maken geen verschil tusschen rechte lijn en recht lijnstuk. We zullen niettemin in vertalingen den laatsten term gebruiken, waar de duidelijkheid dit eischt. In de meeste gevallen is trouwens de bedoeling wel uit den tekst op te maken.

[13]) Eutokios zegt het uitdrukkelijk (*Opera* III, 4; l. 16): *ἐκ δέ τούτων ἦν ἡ ἐπιλογὴ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλων.*

Een verkeerde vertaling vindt men bij Czwalina, *Kugel und Zylinder* p. 8.

[14]) Hiermee wordt bedoeld, dat het beschouwde oppervlak een rand heeft.

kant", wanneer ze de eigenschap hebben, dat, wanneer er twee punten willekeurig op worden aangenomen, de rechten tusschen zulke punten òf alle aan denzelfden kant van het oppervlak liggen òf deels aan denzelfden kant, deels erop [15]), *maar geen enkele aan den anderen kant.*

V. *Wanneer een bol gesneden wordt door een kegel, die zijn top in het middelpunt van den bol heeft, noem ik stereo-sector* (τομεύς στερεός) *het lichaam, ingesloten door het oppervlak van den kegel en het oppervlak van den bol binnen den kegel.*

VI. *Wanneer twee kegels met dezelfde basis de toppen aan weerskanten van het vlak van de basis hebben, zoodat hunne assen op één rechte liggen, noem ik stereo-rhombos* (ῥόμβος στερεός) *de ruimtelijke figuur, die uit de beide kegels bestaat.*

3. LAMBANOMENA.

Met dezen titel wordt een groep postulaten of axiomata in den zin van „onbewezen grondstellingen over reeds bekende figuren" aangeduid.

Ik neem het volgende aan:

I. *Dat van de lijnen, die dezelfde uiteinden hebben, de rechte de kleinste is.*

II. *Dat van de andere lijnen* [16]), *indien ze, in één plat vlak gelegen, dezelfde uiteinden hebben, er twee ongelijk zijn, wanneer ze beide naar denzelfden kant hol zijn en bovendien òf de eene geheel wordt omvat door de andere en door de rechte, die dezelfde uiteinden heeft als zij, òf deels door haar wordt omvat, deels er mee samenvalt; en dat de omvatte de kleinste is.*

III. *Evenzoo, dat van de oppervlakken, die dezelfde grenzen hebben, indien deze in één plat vlak liggen, het platte het kleinste is.*

IV. *Dat van de andere oppervlakken, die dezelfde grenzen hebben, indien de grenzen in één plat vlak liggen, er twee ongelijk zijn,*

---

[15]) Hierbij moet worden gedacht òf aan een regelvlak (i.c. kegel of cylinder) of aan een oppervlak, dat geheel of ten deele uit platte vlakstukken bestaat.

[16]) d.w.z. van alle lijnen, die niet recht zijn (dus de καμπύλαι γραμμαί).

wanneer ze beide hol zijn naar denzelfden kant en bovendien òf het eene geheel wordt omvat door het andere en door het platte vlak, dat dezelfde grenzen heeft òf deels erdoor wordt omvat, deels er mee samenvalt; en dat het omvatte het kleinste is.

Hierna volgt het befaamde postulaat, dat, hoewel het reeds lang vóór Archimedes was ingevoerd door Eudoxos en gebruikt door Euclides [17]), veelvuldig nog ten onrechte als axioma van Archimedes bekend staat.

V. *Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων.*	V. *En ook nog, dat van ongelijke lijnen, ongelijke oppervlakken en ongelijke lichamen het grootste het kleinste overtreft met een bedrag zoodanig, dat het, bij zich zelf gevoegd, ieder voorgeschreven exemplaar van de soort der met elkander vergeleken grootheden kan overtreffen.*

Het „bij zich zelf voegen" moet natuurlijk willekeurig vaak herhaald worden gedacht; de beteekenis is dus: met een natuurlijk getal vermenigvuldigd.

Er bestaan groote onderlinge afwijkingen tusschen de vertalingen, die verschillende uitgevers van de laatste woorden van dit axioma *παντός τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων* geven. Zonder aanspraak op volledigheid vermelden we de volgende opvattingen:

a) *Editio Princeps* [18]) : *omnem propositam sui generis quantitatem.*
b) *Heiberg* [19]) : *quamvis magnitudinem datam earum, quae cum ea comparari possint.*
c) *Heath* [20]) : *any assigned magnitude among those which are comparable with [it and with] another.*
d) *Heath* [21]) : *any assigned magnitude of the same kind.*

---

[17]) *Elementen van Euclides* II, 58.
[18]) geciteerd p. 36, noot 3; pag. 2 van de Latijnsche vertaling.
[19]) *Opera* I, 9. en eenigszins anders bij de vermelding van het axioma in **Spir.** *(Opera II,13): . . . . earum, quae inter se comparari possint.*
[20]) Heath, *Archimedes* p. 4.
[21]) Heath, *Greek Mathematics* II, 35.

e) *Ver Eecke*[22]) : *toute grandeur donnée ayant un rapport avec l'une et l'autre des premières.*

f) *Czwalina*[23]) : *jede der beiden gegebenen Grössen.*

Wanneer men dus de beide ongelijke lijnen (oppervlakken, lichamen), waarvan Archimedes spreekt, resp. A en B noemt en $A - B = C$ stelt, dan zeggen de vertalingen *a*), *b*) en, voorzoover het de toevoeging tusschen [ ] betreft, ook *c*), dat er een getal n bestaat, zoodat $n \, . \, C > D$, wanneer D met C vergelijkbaar of „van dezelfde soort" is; ook in *d*) schijnt dit bedoeld te worden. Dan rijst natuurlijk de vraag, wanneer twee grootheden gelijksoortig of vergelijkbaar heeten. Als men die vraag niet beantwoordt, is het axioma nietszeggend; als men het, wat redelijk ware, omschrijft als „ten opzichte van elkander voldoend aan het axioma van Eudoxos" [24]), is het een tautologie; wanneer men het echter, zonder een scherpe definitie te geven, in dien zin interpreteert, dat lijnen met lijnen, oppervlakken met oppervlakken en lichamen met lichamen gelijksoortig zijn, dan geeft men aan het axioma een beteekenis, die in strijd is met de toepassing, die er, zooals blijken zal, voortdurend van wordt gemaakt. Immers, wanneer men dan eens onderstelde, dat het verschil C van twee lichamen A en B en dus ook dat D een oppervlak was, dan zou het axioma slechts het bestaan van een getal n eischen, waarvoor $n \, . \, C > D$ is, terwijl het in de toepassingen steeds noodig zal blijken, dat $n \, . \, C$ in het beschouwde geval grooter dan een willekeurig *lichaam* kan worden gemaakt.

En die eisch wordt toch wel heel duidelijk in den tekst uitgedrukt: $n \, . \, C$ moet grooter kunnen worden dan elk exemplaar van de soort der in het begin van het axioma met elkaar vergeleken grootheden, dus opv. grooter dan elke lijn, elk oppervlak, elk lichaam, wanneer C zelf het verschil is van twee lijnen, van twee oppervlakken of van twee lichamen. Er is geen sprake van *vergelijkbare,* maar alleen van reeds in de daad met elkaar *vergeleken* grootheden.

Het blijkt dus, dat de vertaling *e*), hoewel taalkundig niet nauwkeurig met den tekst overeenstemmend, althans den zin van de

---

[22]) Ver Eecke, *Archimède* p. 6.
[23]) Czwalina, *Kugel und Zylinder* p. 9.
[24]) In deze beteekenis wordt nl. gelijksoortig gebruikt bij Euclides V. Def. 3. Zie *Elementen van Euclides* II, 57.

uitspraak juist weergeeft. Immers *D* heeft volgens de redentheorie slechts dan een reden tot *A* en tot *B*, wanneer *D* met *A* en met *B* gelijksoortig is.

De vertaling f) ten slotte vertoont geenerlei overeenstemming met den tekst.

De boven door ons aanvaarde en in de vertaling tot uiting gebrachte opvatting kan men o.a. aantreffen in de volgende overzettingen:

Mersenne[25]) : *quamcumque dictarum, et inter se collatarum magnitudinum.*

Nizze[26]) : *jede gegebene Grösse von der Art der verglichenen.*

We zijn op de vraag naar de juiste vertaling van het vijfde axioma iets uitvoeriger ingegaan, omdat eerst nu de juiste beteekenis van de woorden van Archimedes is vastgesteld, een discussie mogelijk is van de gewoonlijk veronachtzaamde, maar daarom niet minder dringende kwestie, welk motief hem eigenlijk tot het opnemen van dit axioma heeft kunnen drijven. Men bedenke nl. wel, dat, wanneer men in zijn woorden niet meer leest, dan dat een lijn (oppervlak, lichaam), die het verschil van twee lijnen (oppervlakken, lichamen) is, ten opzichte van elk exemplaar van dezelfde soort aan het axioma van Eudoxos voldoet, de uitdrukkelijke vermelding van deze uitspraak geheel ongemotiveerd is. Immers Archimedes gebruikt in zijn geheele werk èn de redentheorie van Eudoxos[27]) èn het lemma van Euclides (*Elementen* X, 1), dat over de voortgezette dichotomie van een grootheid handelt (III; 0,5) en deze steunen beide op het axioma van Eudoxos. Waarom het dan nog eens afzonderlijk uit te spreken voor grootheden, die toevallig als verschil van twee andere optreden?

Wat hiervan nu echter de bedoeling is, zal na het bovenstaande duidelijk kunnen zijn. Archimedes wil vaststellen, dat, hoe weinig ook twee lijnen (oppervlakken, lichamen) van elkander verschillen, hun verschil steeds weer een lijn (oppervlak, lichaam) is. Hij had

25) *Universae Geometriae, Mixtaeque Mathematicae Synopsis, Et Bini Refractionum Demonstratarum Tractatus. Studio et Opera* F. M. Mersenne M. Parisiis MDCXLIV.

26) geciteerd p. 38, noot 4.

27) d.w.z. de redentheorie van Euclides V. *Elementen van Euclides* I, 66. II, 56.

dit zóó kunnen formuleeren, om dan de conclusie te trekken, dat zulk een verschil dus ten opzichte van elke grootheid van de soort der met elkander vergelekene aan het axioma van Eudoxos voldoet. Hij geeft nu die conclusie als axioma, daarmee de eerstgenoemde uitspraak impliceerend.

Men kan nu ten slotte nog vragen, of er dan behoefte aan de uitdrukkelijke formuleering van die uitspraak kon bestaan. Het antwoord op deze vraag ligt voor de hand, wanneer men overweegt, dat in de Grieksche Wiskunde naast de strenge en officieele methode der indirecte grensbepaling de minder strenge, maar heuristisch meer vruchtbare methode der indivisibilia heeft bestaan en dat Archimedes haar zelf als middel van onderzoek ijverig heeft toegepast [29]. In die methode wordt een lichaam als som van vlakke doorsneden, een oppervlak als som van lijnen beschouwd, terwijl de beschouwing van een kromme als ontstaan door iuxtapositie van punten er in thuishoort; dat kon gemakkelijk de gedachte wekken, dat dan ook het verschil van twee lichamen wel eens een oppervlak, dat van twee oppervlakken een lengte zou kunnen zijn. Of dat denkbeeld ooit practisch is toegepast, kunnen we in het midden laten. Maar het is in ieder geval begrijpelijk, dat Archimedes, waar hij zijn resultaten streng wil gaan bewijzen met behulp van een methode, waarvan het essentieele fundament juist dit is, dat het verschil van twee grootheden van dezelfde soort, hoe klein ook gedacht, ten opzichte van elke grootheid van die soort voldoet aan het axioma van Eudoxos, het noodig vindt, om alle onstrenge voorstellingen, die de methode der indivisibilia op dit punt zou kunnen doen ontstaan, te verbannen.

Hij sluit, om het modern te zeggen, het bestaan van actueel oneindig kleine grootheden uit; de grootheden, die hij gaat beschouwen, zullen Eudoxische systemen vormen.

Aan het slot van de *Lambanomena* wordt, als conclusie uit het tweede vermeld, dat de omtrek van een in een cirkel beschreven polygoon kleiner is dan de omtrek van den cirkel.

4. **Inleidende Proposities.** (1—6).

In het eerste Boek van *Over Bol en Cylinder* zal herhaaldelijk de redenvorm van de compressie-methode (III; 8,21) worden

---

[29]) Zie Hoofdstuk X.

INHOUD:

toegepast. Als voorbereiding daartoe dient de groep proposities 2—6. Daaraan gaat vooraf de propositie 1, waarin uit het tweede axioma wordt afgeleid, dat de omtrek van een om een cirkel beschreven polygoon grooter is dan de omtrek van den cirkel.

In de volgende proposities beduidt

C een cirkel, C_n een om dien cirkel beschreven regelmatige veelhoek met n zijden, I_n een in dien cirkel beschreven regelmatige veelhoek met n zijden. Alle drie teekens duiden tevens de oppervlakte aan van de figuur, die zij voorstellen. De zijden der veelhoeken heeten opv. Z_n en z_n.

Propositie 2.

Wanneer twee ongelijke grootheden gegeven zijn, is het mogelijk, twee ongelijke rechten te vinden, zoodat de grootste rechte tot de kleinste een kleinere reden heeft dan de grootste grootheid tot de kleinste.

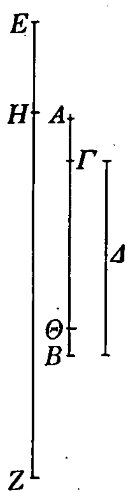


Fig. 52.

Bewijs: Laat (fig. 52) de gegeven grootheden AB en Δ zijn ($AB > \Delta$). Maak $B\Gamma = \Delta$. Neem een willekeurige rechte ZH. Bepaal een veelvoud $A\Theta$ van $A\Gamma$ zoodat $A\Theta > \Delta$ (postulaat van Eudoxos). Zij nu HE hetzelfde deel van ZH, als $A\Gamma$ van $A\Theta$ is. Dan is

$(EH, HZ) = (A\Gamma, A\Theta)$ dus, wegens $A\Theta > \Delta$,
$(EH, HZ) < (A\Gamma, \Delta) = (A\Gamma, \Gamma B)$.
Componendo (III; 0,42)
$(EZ, HZ) < (AB, \Gamma B) = (AB, \Delta)$.

Dit bewijs kan bij oppervlakkige beschouwing noodeloos lang lijken. Men zou nl. kunnen vragen, waarom men niet een willekeurig punt Θ tusschen A en B kiest en dan besluit tot $(A\Theta, \Delta) < (AB, \Delta)$. Hierbij zou echter vergeten worden, dat AB en Δ wel, om de gedachten te bepalen, door lijnstukken worden voorgesteld, maar dat het in werkelijkheid niet nader omschreven meetkundige grootheden ($\mu\varepsilon\gamma\acute{\varepsilon}\vartheta\eta$), b.v. lengten van krommen, oppervlakten of inhouden zijn. EZ en HZ daarentegen zijn echte lijnstukken. Van de grootheden AB en Δ wordt, hoewel het in de propositie niet uitdrukkelijk gezegd wordt, blijkens de gegeven

ongelijkheidsrelatie en de toepassing van het axioma van Eudoxos, ondersteld, dat ze gelijksoortig zijn.

In moderne notatie luidt de gehouden redeneering als volgt:

Zijn a en b twee ongelijke gelijksoortige grootheden ($a > b$), bepaal dan een natuurlijk getal n, zoodat

$$n\,(a - b) > b$$

Hieruit volgt

$$\frac{n+1}{n} < \frac{a}{b}.$$

P r o p o s i t i e 3.

Wanneer twee ongelijke grootheden gegeven zijn èn een cirkel, dan is het mogelijk, in den cirkel een polygoon te beschrijven en om den cirkel een ander, zoodat de zijde van het omgeschreven polygoon tot de zijde van het ingeschreven polygoon een kleinere reden heeft dan de grootste grootheid tot de kleinste.

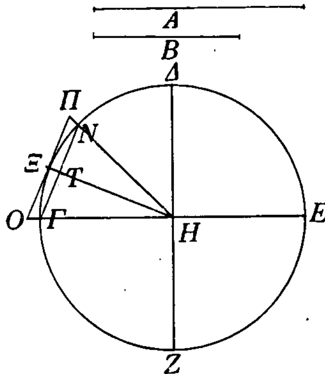


Fig. 53.

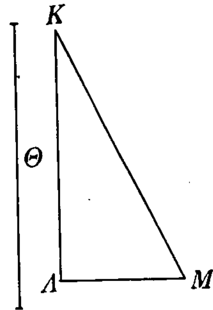


Fig. 54.

Bewijs (fig. 53): Laat gegeven zijn de grootheden A en B ($A > B$) en de cirkel H. Bepaal (prop. 2) twee rechten Θ, $K\Lambda$ ($\Theta > K\Lambda$), zoodat

$$(\Theta, K\Lambda) < (A, B).$$

Construeer nu (fig. 54) een driehoek $K\Lambda M$, rechthoekig in Λ, waarin $KM = \Theta$. Trek in den cirkel H twee onderling loodrechte middellijnen ΓE en ΔZ. Pas op den hoek $\Gamma H \Delta$ dichotomie (III; 0,5) toe, totdat $\angle\, NH\Gamma < 2.\ \angle\, \Lambda KM$. $N\Gamma$ is nu zijde

van een gelijkzijdig ingeschreven polygoon. $H\Xi$ zij deellijn van $\angle \Gamma HN$, $O\Pi$ raaklijn aan den cirkel in Ξ, dan is $O\Pi$ zijde van een gelijkzijdig omgeschreven polygoon. Snijdt nu $H\Xi$ $N\Gamma$ in T, dan is

$$\angle NH\Gamma < 2 \,.\, \angle \Lambda KM, \text{ dus } \angle TH\Gamma < \angle \Lambda KM.$$

Hieruit volgt:

$$(\Gamma H, HT) < (KM, K\Lambda)$$

of

$$(H\Xi, HT) < (\Theta,\, K\Lambda)$$

dus

$$(\Pi O, N\Gamma) < (\Theta,\, K\Lambda) < (A, B).$$

Moderne notatie: Men bepaalt een getal p, zoodat

$$\frac{p+1}{p} < \frac{A}{B}.$$

Construeer nu een hoek φ (ΛKM), zoodat $\cos\,\varphi = \frac{p}{p+1}$.

Bepaal door dichotomie een hoek $\alpha = \frac{\frac{1}{2}\pi}{2^m}$ zoodat $\alpha < 2\varphi$.

Laat α nu middelpuntshoek zijn van een regelmatigen om- resp. ingeschreven veelhoek met n zijden ($n = 2^{m+2}$), dan geldt voor de zijden Z_n en z_n daarvan

$$\frac{Z_n}{z_n} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{\cos\,\varphi} = \frac{p+1}{p} < \frac{A}{B}.$$

Propositie 4.

Deze is gelijkluidend met Prop. 3, mits men inplaats van een cirkel een cirkelsector gegeven denkt, waarin en waarom gelijkstandige gelijkzijdige polygoonstukken worden beschreven. De dichotomie wordt nu toegepast op den middelpuntshoek van den sector.

Propositie 5.

Wanneer een cirkel gegeven is èn twee ongelijke grootheden, om den cirkel een polygoon te beschrijven en een ander erin, zoodat het omgeschreven polygoon tot het ingeschrevene een kleinere reden heeft dan de grootste grootheid tot de kleinste.

Oplossing: Laat gegeven zijn (fig. 55) de cirkel A en de ongelijke grootheden E, Z $(E > Z)$. Construeer (prop. 2) twee rechten Γ, Δ $(\Gamma > \Delta)$, zoodat $(\Gamma, \Delta) < (E, Z)$. Bepaal de middenevenredige H van Γ en Δ, dan is $\mathbf{T}(H) = \mathbf{O}(\Gamma, \Delta) < \mathbf{T}(\Gamma)$, dus $H < \Gamma$. Beschrijf (Prop. 3) om A een polygoon C_n en in A een polygoon I_n, zoodat de verhouding der zijden Z_n en z_n voldoet aan

$$(Z_n, z_n) < (\Gamma, H).$$

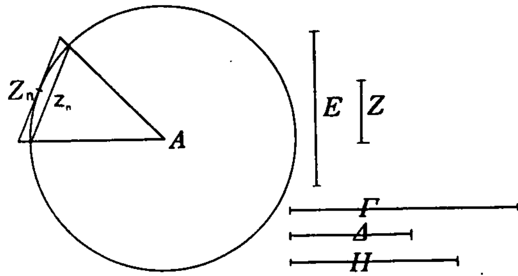


Fig. 55.

Dan is ook (III; 0,43)

$$\Delta\Delta(Z_n, z_n) < \Delta\Delta(\Gamma, H) = (\Gamma, \Delta)$$

dus

$$(C_n, I_n) < (\Gamma, \Delta) < (E, Z).$$

Moderne notatie:

$$\frac{C_n}{I_n} = \frac{Z_n^2}{z_n^2} < \frac{\Gamma^2}{H^2} = \frac{\Gamma^2}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma}{\Delta} < \frac{E}{Z}.$$

Propositie 6.

α) Op dezelfde wijze kan de overeenkomstige stelling voor een cirkelsector bewezen worden.

β) Herinnerd wordt aan de stelling uit de *Elementen* (voorkomend in Euclides XII, 2), dat bij voortgezette verdubbeling van het aantal zijden van een ingeschreven gelijkzijdig polygoon de som der overblijvende cirkelsegmenten beneden een voorgeschreven oppervlakte daalt.

γ) Daarna wordt aangetoond, dat een overeenkomstige stelling geldt voor de som der raaklijnsectoren [30]), die binnen een omgeschreven gelijkzijdig polygoon en buiten den cirkel liggen.

---

[30]) Onder een raaklijnsector verstaan we de figuur, begrensd door de stukken van twee elkander snijdende raaklijnen van een cirkel tusschen het snijpunt en de raakpunten en den kleinsten boog van den cirkel tusschen de raakpunten.

Bewijs: Zij de voorgeschreven oppervlakte B en de oppervlakte van den cirkel C, dan is het mogelijk (Prop. 5), een getal n zoo te bepalen, dat

$$(C_n, I_n) < (C + B, C) \text{ dus, wegens } I_n < C$$
$$(C_n, C) < (C + B, C)$$

dus

$$C_n < C + B \quad \text{of} \quad C_n - C < B.$$

De eigenlijke beteekenis van de groep proposities 2—6 wordt duidelijk, wanneer we de telkens voorkomende verhouding van twee ongelijke gelijksoortige grootheden door ε voorstellen (waarbij dus $\varepsilon > 1$).

Bewezen is dan, dat men n zoo kan kiezen, dat

In Prop. 2 $\quad 1 < \frac{n+1}{n} < \varepsilon \quad$ d.w.z.[31] $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$

In Prop. 3 $\quad 1 < \frac{Z_n}{z_n} < \varepsilon \quad$ d.w.z. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{Z_n}{z_n} = 1.$

In Prop. 5 $\quad 1 < \frac{C_n}{I_n} < \varepsilon \quad$ d.w.z. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{C_n}{I_n} = 1.$

In Prop. 6 wordt er aan herinnerd, dat bij een gegeven getal $\delta > 0$ een getal n zoo te kiezen is, dat

$$0 < C - I_n < \delta \qquad \text{d.w.z. } \lim_{n \to \infty} (C - I_n) = 0$$

en wordt bovendien bewezen

$$0 < C_n - C < \delta \qquad \text{d.w.z. } \lim_{n \to \infty} (C_n - C) = 0.$$

5. **Ronde Oppervlakte van Cylinder en Kegel. Proposities 7—20.**

De hoofdstellingen van deze groep zijn de proposities 13 en 14, waarin de ronde oppervlakte van een cylinder, resp. kegel wordt bepaald. Als inleiding dienen:

---

[31]) De bedoeling van deze opmerking is, dat tusschen de proposities van Archimedes en de daarachter vermelde stellingen der variantentheorie uitsluitend een verschil in schrijfwijze bestaat.

Prop. 7 en 8, waarin de zijdelingsche oppervlakte van een in- resp. omgeschreven regelmatige pyramide van een kegel wordt bepaald.

Prop. 9 en 10, waarin deze zijdelingsche oppervlakten met de ronde oppervlakte van den kegel vergeleken worden.

Prop. 11 en 12, waarin de zijdelingsche oppervlakten van regelmatige prismata, die in- resp. om een cylinder beschreven zijn, met de ronde oppervlakte van dezen cylinder vergeleken worden.

Propositie 7.

Wanneer in een gelijkbeenigen kegel een pyramide wordt beschreven, die een gelijkzijdige basis heeft, is de oppervlakte daarvan zonder de basis gelijk aan een driehoek, die de basis gelijk heeft aan den omtrek van de basis [*van de pyramide*] *en tot hoogte de lijn, uit den top loodrecht op een zijde van de basis getrokken.*

Tegenwoordig drukt men dit uit door te zeggen, dat de zijdelingsche oppervlakte van een regelmatige pyramide gelijk is aan het halve product van den omtrek van het grondvlak en het apothema. Deze zegswijze heeft echter in de Grieksche wiskunde geen zin, omdat de lengten der lijnstukken, die wij vermenigvuldigen, in het algemeen niet door getallen zullen kunnen worden uitgedrukt. Zoo moet de Grieksche wiskundige overal, waar wij, om een oppervlakte uit te drukken, een product van twee factoren gebruiken, een vlakke figuur invoeren, welker oppervlakte aan die der beschouwde figuur gelijk is. Dit maakt de redeneeringen in ons oog vaak omslachtig; het is echter een wezenlijke trek der Grieksche beschouwingswijze, die hier tot uiting komt.

Het bewijs van Prop. 7 is overigens geheel gelijk aan het thans nog gebruikelijke.

In Prop. 8 wordt de overeenkomstige stelling voor een omgeschreven pyramide uitgesproken en bewezen.

Propositie 9.

Indien bij een gelijkbeenigen kegel een rechte lijn binnen den cirkel, die basis van den kegel is, valt en er worden vanuit haar uiteinden rechte lijnen naar den top van den kegel getrokken, dan

zal de driehoek, omvat door de koorde en de verbindingslijnen met den top kleiner zijn dan de oppervlakte van den kegel tusschen de verbindingslijnen met den top.

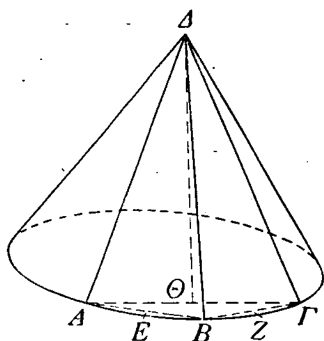


Fig. 56.

Zij (fig. 56) $\Delta . AB\Gamma$ de gegeven rechte cirkelkegel, $A\Gamma$ een koorde van den grondcirkel. Het gestelde luidt:

$$\triangle \Delta A\Gamma <$$ mantelsegment $\Delta A\Gamma$.

Bewijs: Zij B het midden van bg $A\Gamma$, dan is

(α) $\triangle \Delta AB + \triangle \Delta B\Gamma > \triangle \Delta A\Gamma$

(zie Opmerking).

Stel $\triangle \Delta AB + \triangle \Delta B\Gamma - \triangle \Delta A\Gamma = \Theta$ (1)

dan is òf (I) $\Theta \geqq$ cirkelsegment $AB +$ cirkelsegment $B\Gamma$

òf (II) $\Theta <$ cirkelsegment $AB +$ cirkelsegment $B\Gamma$.

Geval I. Wegens postulaat III geldt

$\triangle \Delta AB <$ cirkelsegment $AB +$ mantelsegment ΔAB

$\triangle \Delta B\Gamma <$ cirkelsegment $B\Gamma +$ mantelsegment $\Delta B\Gamma$

$\triangle \Delta AB + \triangle \Delta B\Gamma <$ cirkelsegment $AB +$ cirkelsegment $B\Gamma +$ mantelsegment $\Delta A\Gamma$

a fortiori:

$\triangle \Delta AB + \triangle \Delta B\Gamma < \Theta +$ mantelsegment $\Delta A\Gamma$

waaruit wegens (1) volgt:

$\triangle \Delta A\Gamma <$ mantelsegment $\Delta A\Gamma$.

Geval II. Pas op de bogen AB en $B\Gamma$ dichotomie toe (III; 0,5), totdat de som der overblijvende cirkelsegmenten kleiner wordt dan Θ (6β). Aangenomen wordt, dat dit reeds na één verdeeling bereikt is. Uit postulaat III volgt nu als boven:

$\triangle \Delta AE + \triangle \Delta EB + \triangle \Delta BZ + \triangle \Delta Z\Gamma <$ som der cirkelsegmenten AE enz. $+$ mantelsegment $\Delta A\Gamma$.

waaruit a fortiori volgt:

$\triangle \Delta AB + \triangle \Delta B\Gamma < \Theta +$ mantelsegment $\Delta A\Gamma$

dus wegens (1)

$\triangle \Delta A\Gamma <$ mantelsegment $\Delta A\Gamma$,

Het bewijs is zonder moeite uit te breiden op het geval, dat de dichotomie uit meer dan één stap bestaat.

Opmerking: De voor het bewijs fundamenteele ongelijkheid (α), die Archimedes zonder motiveering opschrijft, wordt in verschillende edities en commentaren òf niet òf onjuist bewezen. Wat Eutokios [32]) er over zegt, is onbegrijpelijk. Heiberg en Ver Eecke meenen [33]), dat de loodlijnen, uit Δ op de koorden AB, $B\Gamma$, ΓA van de basis neergelaten, gelijk zijn en beroepen zich dan op $AB + B\Gamma > A\Gamma$.

Met Grieksche methoden kan het bewijs als volgt geleverd worden:

Wegens Euclides XI, 20 is

$$\angle A\Delta B + \angle B\Delta\Gamma > \angle A\Delta\Gamma$$

dus, als Θ het midden van $A\Gamma$ is

$$\angle A\Delta B > \angle A\Delta\Theta.$$

Ook is

$$\Delta B > \Delta\Theta.$$

Van de driehoeken ΔAB en $\Delta A\Theta$ is nu bekend $\Delta A = \Delta A$, $\Delta B > \Delta\Theta$, $\angle A\Delta B > \angle A\Delta\Theta$. Teekent men nu (fig. 57) de beide driehoeken in één plat vlak aan dezelfde zijde van $A\Delta$, dan valt $\Delta\Theta$ binnen $\angle A\Delta B$. Is nu $AK \perp \Delta B$, dan is $AK > A\Theta$, omdat in den cirkel met diameter $A\Delta$ de koorde AK een grooteren boog onderspant dan $A\Theta$. Daar nu bovendien $\Delta B > \Delta\Theta$, is zeker

$$\triangle \Delta AB > \triangle \Delta A\Theta.$$

Evenzoo is

$$\triangle \Delta B\Gamma > \triangle \Delta\Theta\Gamma$$

waaruit het gestelde volgt.

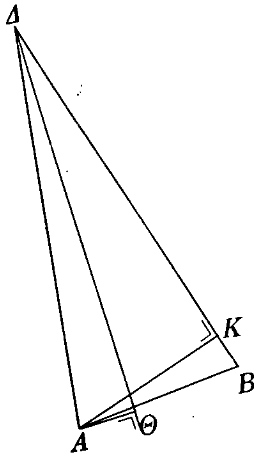


Fig. 57.

Uit de bewezen propositie volgt, dat de zijdelingsche oppervlakte van een in een kegel beschreven pyramide kleiner is dan de ronde

---

[32]) *Opera* III, 24

[33]) *Opera* I, 31. noot 2. Ver Eecke, *Archimède* p. 17; noot 2.